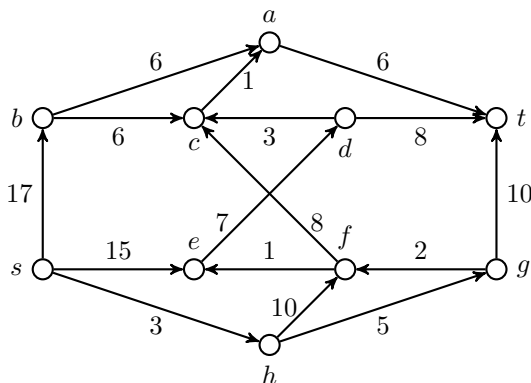


## A számítástudomány alapjai

12. gyakorlat, 2013. november 28 illetve december 2.

### PERT, bonyolultságelmélet

- Eldöntési problémákról beszélünk!
  - $P \subseteq NP$ ,  $P \subseteq coNP$ . Tehát ha valami  $P$ -beli, akkor **biztos**, hogy  $NP$ -beli és  $coNP$ -beli is.
  - **$P$ -beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem fontos a hatékonyság,  $n^{100}$  is polinomiális!
  - **$NP$ -beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. Nem kell algoritmus a tanú előállítására!
  - **$NP$ -teljesség bizonyítása**  $\pi$  problémára:
    1.  $\pi$   $NP$ -beliségének bizonyítása.
    2.  $\pi$   $NP$ -nehézségének bizonyítása:
      - (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismert  $NP$ -nehéz, ez legyen  $\rho$  (a feladatokban ez leggyakrabban: H-kör, H-út,  $k$ -szín, maxklick, maxftln).
      - (b) Bemutatunk egy  $\rho \prec \pi$  Karp-redukciót, az irány fontos!
      - (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha  $f$  az átalakítás:  $x \in \rho \Leftrightarrow f(x) \in \pi$  a bizonyítandó. Figyelem,  $\Leftrightarrow$ , akkor és csak akkor!
      - (d) Belátjuk, hogy  $f$  polinom időben elvégezhető.
1. Határozzuk meg az ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek!



2. Legyen a  $\Pi$  döntési probléma inputja egy  $G$  gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van  $G$ -ben Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy  $\Pi \in NP$ .
3. Legyen a  $\Pi$  döntési probléma inputja egy összefüggő  $G$  gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van  $G$ -ben Euler-körséta. Mutassuk meg, hogy  $\Pi \in coNP$ .

4. Legyen a  $\Pi$  döntési probléma inputja egy  $G$  gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha  $G$  síkbarajzolható. Mutassuk meg, hogy  $\Pi \in NP \cap coNP$ .
5. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott  $G$  gráf kiszínezhető-e legfeljebb  $k$  db színnel! (Vagyis input:  $G$  és  $k$ ; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni  $\chi(G)$ -t?
6. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott  $G$  gráf kiszínezhető-e legfeljebb  $k$  db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi  $\chi(G)$ . Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot  $\chi(G)$  színnel?
7. Be tudjuk-e bizonyítani a következő problémák  $P$ ,  $NP$  és  $coNP$ -beliségét? A szorgalmasak bizonyíthatnak egyes problémákra  $NP$ -teljességet is. Az input egy  $G(V, E)$  gráf ( $|V| = n, |E| = e$ ).
  - (a) Van-e  $G$ -ben legalább  $k$  hosszú kör? ( $k$  az input része.)
  - (b) Kiszínezhető-e  $G$  pontjai 2 színnel úgy, hogy legfeljebb 2 él kivételével minden él végpontjai különböző színűek?
  - (c) Kiszínezhető-e  $G$  4 színnel?
  - (d) Van-e  $G$ -ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?
  - (e) Van-e  $G$ -ben egy legalább  $k$  pontú teljes részgráf? ( $k$  az input része.)
  - (f) Teljesül-e az Ore-feltétel?
  - (g) Van-e  $G$ -ben legfeljebb  $S$  súlyú (egyszerű) út? ( $S$  az input része.)
  - (h) Van-e  $G$ -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?
8. Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a  $\pi$  döntési probléma, aminek a bemenete egy egyszerű  $G$  gráf, az  $n$  és  $m$  számok, a kimenete pedig pontosan akkor „igen”, ha  $G$ -nek van olyan  $n$  csúcsú részgráfja, aminek legalább  $m$  éle van.
9. Igazoljuk, hogy a  $P$  és  $NP$  problémaosztályba egyaránt beletartozik annak eldöntése, hogy egy inputként megadott  $G$  irányítatlan gráfban létezik-e két különböző kör.
10. Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)  
**Input:**  $G$  egyszerű gráf és  $v \in V(G)$   
**Kérdés:** Van-e  $G$ -nek olyan feszítőfája, amelyben  $v$  az egyetlen olyan pont, aminek a foka legalább 3?
11. Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)  
**Input:**  $G$  egyszerű gráf  
**Kérdés:** Van-e  $G$ -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?

12. A  $G$  irányítatlan gráf minden  $x$  pontjához tartozik egy  $s(x)$  súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, és bizonyítsuk be, hogy  $NP$ -teljes!
13. Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy  $NP$ -teljes!)  
**Input:**  $G$  egyszerű gráf  
**Kérdés:**  $G$  színezhető-e a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék?
14. Bizonyítsuk be, hogy  $NP$ -teljes az a  $\pi$  döntési probléma, aminek a bemenete egy  $100n$  pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig pontosan akkor „igen”, ha  $G$ -nek van legalább  $n$  pontú köre.