A számítástudomány alapjai

11. gyakorlat, 2013. november 21 illetve 25.

Síkgráfok, dualitás

Egy G gráf síkbarajzolható (síkgráf), ha lerajzolható a síkra metszés nélkül. Tegyük fel, hogy a G összefüggő gráfot lerajzoltuk a síkra metszés nélkül, legyen n a csúcsok, e az élek, t a tartományok száma. Euler formula: ha $n \geq 3$, akkor $n - e + t = 2$.

Következmény: egy $n \geq 3$ csúcsú, e élű G síkgráfra $e \leq 3n - 6$. Ha ráadásul G páros gráf is, akkor $e \leq 2n - 4$.

Két gráf, G és H *topologikusan izomorf*, ha G-ből megkaphatjuk H-t a következő két művelet ismételt alkalmazásával.

1. egy 2 fokú csúcsot helyettesítünk egy éllel. (u szomszédai v és w, hagyjuk el u-t, és kössük össze v-t és w-t)

2. élet helyettesítünk egy 2 fokú csúccsal. (v és w szomszédosak, hagyjuk el a vw élt, vegyünk be egy új csúcsot, u-t, és kössük össze v-vel és w-vel)

Topologikus K_5: egy teljes 5 csúcsú gráffal topologikusan izomorf gráf. Topologikus $K_{3,3}$: egy $K_{3,3}$-mal (teljes páros gráf $3-3$ csúccsal) topologikusan izomorf gráf.

Kuratowski tétel: Egy G gráf síkgráf akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz topologikus K_5 illetve topologikus $K_{3,3}$ részgráfot.

Négyszíntétel: ha G síkgráf akkor $\chi(G) \leq 4$.

Egy metszés nélkül lerajzolt G gráf G^* *duálisa* egy olyan gráf, amelynek csúcsai G tartományainak felelnek meg, két csúcsát annyi éllel kötjük össze, ahány él mentén szomszédos a két megfelelő tartomány. Egy gráfnak sok duálisa lehet, más lerajzoláshoz más duális tartozhat.

Egy H gráf G *absztrakt duálisa*, ha található G és H élei között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, amely kört vágásba, vágást körbe visz.

Egy G és H gráf *gyengén izomorfak*, ha található G és H élei között olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, amely kört körbe visz. Belátható, hogy ekkor a leképezés vágást vágásba visz.

Whitney 1. tétel: G síkbarajzolható, H G-vel gyengén izomorf. Ekkor H is síkbarajzolható, G^* és H^* is gyengén izomorfak, $(G^*)^*$ és $(H^*)^*$ pedig gyengén izomorfak G-vel és H-val.

Whitney 2. tétel: G-nek akkor és csak akkor létezik absztrakt duálisa, ha síkbarajzolható.

Whitney 3. tétel: Egy H gráf akkor és csak akkor gyengén izomorf G-vel, ha a következő három művelet ismételt alkalmazásával eljuthatunk H-ból G-be.

1. Ha $H = H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2 = \{x\}$, akkor húzzuk szét x-et, vagyis helyettesítsük H-t H_1 és H_2 diszjunkt uniójával.

2. Az 1. lépés fordítottja, ha $H = H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$, akkor ragasszuk össze H_1-et és H_2-t egy pontnal. Vagyis azonosítsuk H_1 és H_2 egy-egy csúcsát.

3. Ha $H = H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2 = \{x, y\}$, akkor szedjük szét a két komponenst, és ragasszuk őket össze fordítva. Vagyis H_2 x-nek megfelelő pontját azonosítsuk H_1 y-nak megfelelő pontjával, és H_2 y-nak megfelelő pontját azonosítsuk H_1 x-nek megfelelő pontjával.

1. Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy pontosan $3n - 6$ éle van.

2. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?

3. Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
b) ha G-nek $3n-6$-nál kevesebb éle van, akkor behúzható G-be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
c) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
d) G-nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.

4. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!

5. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és $\bar{G}$ egyike biztosan nem síkgráf.

6. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráf csúcsai kiszínezhetők 6 különböző színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak.

7. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!

8. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzoltság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.

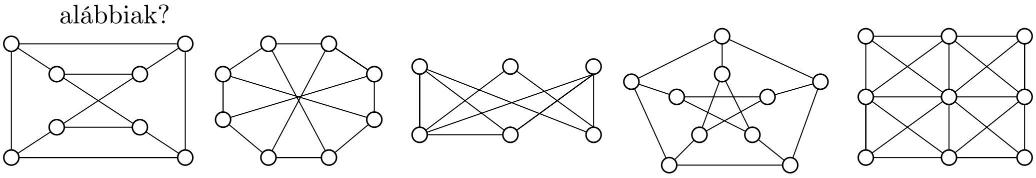
9. Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g, akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.

10. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?

11. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.

12. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?

13. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e, \overline{C_7}$ gráfok? Hát az alábbiak?

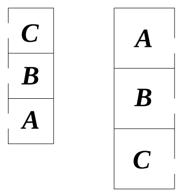


14. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.

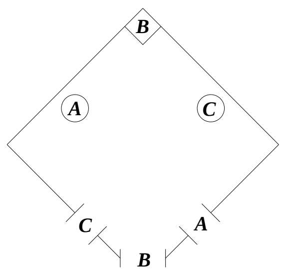
15. a (*). Mézga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csőrmester (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, a garázsaik egy másik épületben vannak, ugyancsak egymás mellett. (1. ábra)

Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnének utakat építeni mindhárom lakastól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresztezzék egymást. (Már öregek és nem tudnak repülni.) Lehetséges ez?

b. Ráadásul a nyaralóik is egy közös kertben vannak, de mindenkinek saját kapuja van, a 2. ábra szerint. Nem túl szerencsés elrendezés. Itt meg tudják építeni az utakat a három háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy ne keresztezzék egymást?



1. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester lakása és garázsa.



2. ábra. Mézga Aladár, Doktor Bubó és Csőrmester nyaralója.

16. Mutassunk olyan síkbarajzolt gráfot, ami nem feltétlenül duálisa a duálisának.

17. Mutassunk példát olyan n csúcsú gráfra, aminek exponenciálisan sok különböző duálisa van. Más szóval, létezik olyan N pozitív egész és $c > 1$ konstans, hogy tetszőleges $n > N$ esetén megadható olyan n csúcsú gráf, aminek legalább c^n páronként nem izomorf duálisa van.

18. Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan konvex poliéder, aminek minden oldala hatszög.

19. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!

20. Jelölje $cr(G)$ a G gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkeresztezések lehetséges minimális számát. Mennyi $cr(K_{4,4})$ értéke?

21. Bizonyítsuk be hogy $cr(K_{5,5}) \geq 11$.

22. Mutassuk meg, hogy a K_7 és a $K_{4,4}$ gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha G síkbarajzolt gráf, akkor G-be tetszőleges élt behúzva tóruszra rajzolható gráfot kapunk.

23. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!

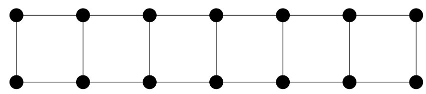
24. Mutassunk olyan 8 pontú gráfot, hogy G és $\overline{G}$ (G komplementere) egyike sem síkbarajzolható.

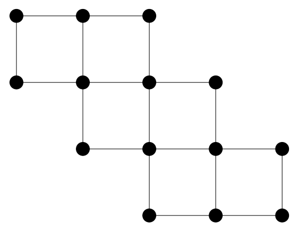
25. Mennyi $cr(K_6)$ értéke?

26. Van-e olyan egyszerű síkbarajzolható gráf, melynek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?

27. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhetők ki két színnel, ha minden pont foka páros.

28. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?





29. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.

30. Mutassunk minden $n > 3$-ra olyan n csúcsú síkbarajzolt gráfot, amely izomorf a duálisával.

31. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.

32. A G és a G^* véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$. δ a legkisebb fokszám.

33. Legyen G olyan $n \geq 3$ csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma $3n - 6$. Mennyi G duálisának maximális fokszáma?

34. Jelölje $F_n = K_{n,n} - nK_2$ azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a $K_{n,n}$ teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen n-ek esetén lesz F_n síkbarajzolható?

35. Tegyük fel, hogy G síkbarajzolt gráf, G minden lapja háromszög és G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?

36. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) egyszerű síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.