

## A számítástudomány alapjai

10. gyakorlat, 2013. november 14 illetve 18.

### Kromatikus szám, élkromatikus szám, síkgráfok

Egy  $G$  gráf *kromatikus száma*  $\chi(G)$  a legkisebb szám azzal a tulajdonsággal, hogy annyi színnel kiszínezhetők  $G$  csúcsai úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színűek.

Egy  $G$  gráf *klikkszáma*  $\omega(G)$  a legnagyobb teljes részgráf mérete,  $\alpha(G)$  a független pontok maximális száma,  $\Delta(G)$  a maximális fokszám.

Minden  $G$  gráfra  $\chi(G) \geq \omega(G)$ . Mycielski konstrukció: olyan  $G_1, G_2, \dots$  gráfsorozat, hogy minden  $i$ -re  $\omega(G_i) = 2$ , de  $\chi(G_i) = i$ .

Minden  $G$  gráfra  $\Delta(G) + 1 \geq \chi(G)$  (biz: mohó színezéssel). Brooks: ha  $G$  összefüggő, nem páratlan kör és nem is teljes gráf, akkor  $\Delta(G) \geq \chi(G)$ .

Egy  $G$  gráf *élkromatikus száma*  $\chi'(G)$  a legkisebb szám azzal a tulajdonsággal, hogy annyi színnel kiszínezhetők  $G$  élei úgy, hogy a szomszédos élek különböző színűek.

Vizing tétel: minden  $G$  gráfra  $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

Egy  $G$  gráf *síkbarajzolható* (síkgráf), ha lerajzolható a síkra metszés nélkül. Tegyük fel, hogy a  $G$  összefüggő gráfot lerajzoltuk a síkra metszés nélkül, legyen  $n$  a csúcsok,  $e$  az élek,  $t$  a tartományok száma. Euler formula: ha  $n \geq 3$  akkor  $n - e + t = 2$ .

Következmény: egy  $n \geq 3$  csúcsú,  $e$  élű síkgráfra  $e \leq 3n - 6$ . Ha ráadásul  $G$  páros gráf is, akkor  $e \leq 2n - 4$ .

Két gráf,  $G$  és  $H$  *topologikusan izomorf*, ha  $G$ -ből megkaphatjuk  $H$ -t a következő két művelet ismételt alkalmazásával:

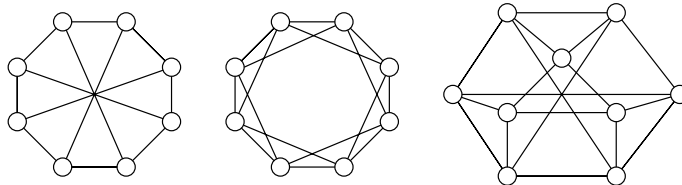
- egy 2 fokú csúcsot helyettesítünk egy éllel ( $u$  szomszédai  $v$  és  $w$ , hagyjuk el  $u$ -t, és kössük össze  $v$ -t és  $w$ -t)
- egy élet helyettesítünk egy 2 fokú csúccsal ( $v$  és  $w$  szomszédosak, hagyjuk el a  $vw$  élt, vegyünk be egy új csúcsot,  $u$ -t, és kössük össze  $v$ -vel és  $w$ -vel)

Topologikus  $K_5$ : egy teljes 5 csúcsú gráffal topologikusan izomorf gráf. topologikus  $K_{3,3}$ : egy  $K_{3,3}$ -mal (teljes páros gráf, 3-3 csúccsal) topologikusan izomorf gráf.

Kuratowski tétel:  $G$  síkgráf akkor és csak akkor, ha nem tartalmaz topologikus  $K_5$  illetve topologikus  $K_{3,3}$  részgráfot.

Négyszíntétel: ha  $G$  síkgráf akkor  $\chi(G) \leq 4$ .

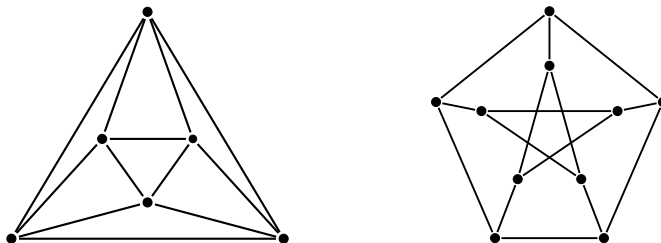
- Határozzuk meg a mellékelt gráfok kromatikus számát!



- Legyenek  $G$  csúcsai az  $1, 2, \dots, 2^n - 1$  számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a  $G$  gráf kromatikus száma?

3. Legyen  $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ , és legyen  $ij \in E(G)$ , ha  $|i - j| \leq 7$ . Mennyi az így meghatározott  $G$  gráf  $\chi(G)$  kromatikus száma?
4. Legyenek a  $G$  gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a  $G$  gráf kromatikus száma?
5. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a  $G$  gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy  $\chi(G) \leq 3$ .
6. Van-e olyan  $G$  gráf, aminek nincs  $K_4$  részgráfja, de  $G$  mégsem színezhető ki 3 színnel?
7. Legfeljebb hány éle lehet annak az  $n$  csúcsú  $G$  gráfnak, amire  $\chi(G) \leq 2$  (ill.  $\chi(G) \leq 3$ )?
8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges  $G$  gráf  $\chi(G)$  színnel történő tetszőleges színezésének bármely színosztályának van olyan  $v$  csúcsa, hogy  $v$ -nek minden más színosztályban van szomszédja.
9. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan  $G$  gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz  $\chi(G)$  élű irányított utat.
10. Igaz-e, hogy minden egyszerű  $G$  gráfnak van olyan színezése  $\chi(G)$  színnel, amelyre valamelyik színosztály  $\alpha(G)$  csúcsot tartalmaz?
11. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $G$  gráfra  $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$ .
12. Legyenek  $K$  és  $H$  a  $G$  gráf két komponense. Legyen  $G'$  az a gráf, amit  $G$ -ből úgy kapunk, hogy  $K$  minden pontját összekötjük  $H$  minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$  ill.  $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$ .
13. Legyenek  $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$  tetszőleges véges gráfok és legyen  $G = (V, E_1 \cup E_2)$  gráfok. Bizonyítsuk be, hogy  $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$ .
14. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.
15. A Mycielski konstrukcióval megkapott  $G_k$  gráfok közül melyek tartalmazzanak Euler körsétát, és melyeknek van Hamilton körük?
16. Tegyük fel, hogy az egyszerű  $G$  gráf  $r$ -reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy  $\chi'(G) = r + 1$ .
17. Tegyük fel, hogy  $G$  egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a  $\chi'(G)$  élkromatikus számot.
18. Határozzuk meg a  $K_n$  teljes gráf  $\chi'(K_n)$  élkromatikus számát.
19. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy  $2n$  pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az  $n$  átmérőt.

20. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?



21. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?
22. Ha  $G$   $n$  pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
- együttal tóruszra is rajzolható;
  - ha  $G$ -nek  $3n - 6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható  $G$ -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
  - $G$  bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
  - $G$ -nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy  $G$  tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
23. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
24. Mutassuk meg, hogy ha  $|V(G)| \geq 11$ , akkor  $G$  és  $\bar{G}$  egyike biztosan nem síkgráf.
25. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráf csúcsai kiszínezhetők 6 különböző színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak.
26. Egy mezőn  $k$  ház és  $k$  kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
27. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt  $G$  gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzoltság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha  $G$  síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor  $G$  3-összefüggő.
28. Mutassuk meg, hogy ha egy  $G$  egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza  $g$ , akkor  $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$ .
29. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
30. Mutassuk meg, hogy ha a  $G$  síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor  $G$  páros gráf.
31. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik  $k$  oldalú sokszög. Mennyi a  $k$  értéke?