

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

13. gyakorlat, 2015. május 5.

Homogén lineáris rekurziók, generátorfüggvények

Fibonacci számok: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és minden $n > 1$ -re $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Ekkor

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

1. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_1 = 0$ $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ rekurziót.
2. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = -3$ $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ rekurziót.
3. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0$ $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ rekurziót.
4. Hányféleképpen mehetünk fel egy n fokból álló lépcsőn egyes és kettes lépésekkel?
5. Hányféleképp lehet lefedni egy $2 \times n$ -es táblát 1×2 -es és 2×2 -es dominók felhasználásával?
6. (Múlt heti házi) Oldjuk meg az $a_0 = 0, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ *nem homogén* lineáris rekurziót.
7. Tegyük fel, hogy valamilyen K számra $a_n = 2Ka_{n-1} - K^2a_{n-2}$.
 - a. $a_0 = 1, a_1 = K$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n = K^n$.
 - b. $a_0 = 0, a_1 = K$. Bizonyítsuk be, hogy $a_n = nK^n$.
8. Adjuk meg állandó együtthatós lineáris rekurzióval c_n -t, ha $c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{17}-3}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{-\sqrt{17}-3}{2} \right)^n$.
9. Legyen $a_1 = 0$ és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + n^2 - 1$. Adjuk meg a_n értékét zárt alakban. Ugyanez a feladat $a_1 = -1$ és $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ esetén.
10. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ rekurziót.
11. Legyen $g_0 = 1$ és $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \dots + (n-1)g_1 + ng_0$. Adjuk meg g_n -t zárt alakban.
12. Mi a generátorfüggvénye az $1, 1, 1, \dots$, az $1, 2, 4, 8, \dots$, az $1, 2, 3, 4, \dots$ és az $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ sorozatoknak?
13. Hogyan írhatók fel a c_n sorozat elemei az a_n , és b_n sorozat elemeivel, ha generátorfüggvényeikre teljesül, hogy $C(x) = A(x)B(x)$.
14. Jelentse $g(n)$ az origóból induló olyan önmagát nem metsző n hosszú séták számát, melyekben minden lépés egy egységnyi északi, keleti vagy nyugati irányban. Fejezzük ki $g(n)$ értékét!

Házi feladat

1. Legyen az a_0, a_1, \dots sorozatra $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = x$. Határozzuk meg, hogy milyen x -re lesz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.