Kombinatorika és gráfelmélet II
2. ZH, 2012. április 21. 10.15-11.45, J202
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 3$–ra

$$R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k}) \leq k \cdot R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k-1}).$$

($R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k})$ az a legkisebb R szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit akárhogy színezzük k színnel, lesz egy egyszínű háromszög.)

Legyen $R = R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k-1})$. Tekintsünk egy kR csúcsú gráfot, és színezzük ki az éleit k színnel. Be kell látnunk, hogy biztosan található egy háromszög, amelynek minden éle ugyanolyan színű. 1 pont

Legyen x az egyik csúcs. Az x csúcsból induló $kR - 1$ él között található R darab, ami egyszínű, mondjuk piros. 3 pont

Legyenek ezen élek másik végpontjai $x_1, \ldots, x_R$. Ha az $x_1, \ldots, x_R$ közötti élek közül egy is piros, mondjuk $x_i x_j$, akkor $x x_i x_j$ egy piros háromszög, tehát kész vagyunk. 3 pont

Ha viszont $x_1, \ldots, x_R$ között nincs piros él, akkor a köztük futó élek csak $k-1$ színnel vannak kiszínezve. Ekkor viszont, az R szám választása miatt, található köztük egyszínű háromszög. 3 pont

2. A G gráfnak 50 csúcsa és 1000 éle van. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy H 6 csúcsú és 14 élű (nem feltétlenül feszített) részgráfot.

1. megoldás: Egy 6 csúcsú teljes gráfnak 15 éle van, tehat a keresett 6 csúcsú és 14 élű részgráf egy K_6 mínusz egy él. 1 pont

Ha G tartalmaz egy K_6-ot, akkor készen vagyunk, ebben megtalálható a keresett gráf részgráfként. 2 pont

Ha nem tartalmaz, akkor a Turán tétel alapján $|E(G)| \leq |E(T_{50,5})|$, és egyenlőség esetén $G = T_{50,5}$. 3 pont

Mivel $|E(T_{50,5})| = 1000$, és a feltevés szerint $|E(G)| \geq 1000$, itt éppen ez a helyzet, tehát $G = T_{50,5}$. 2 pont

Viszont a $T_{50,5}$ gráfban könnyen megtalálhatjuk a keresett 6 csúcsú és 14 élű részgráfot: válasszunk egy osztályból két csúcsot, és minden további osztályból egy-egy további csúcsot. 2 pont

2. megoldás: Egy 6 csúcsú teljes gráfnak 15 éle van, tehat a keresett 6 csúcsú és 14 élű részgráf egy K_6 mínusz egy él. 1 pont

Adjunk hozzá G-hez egy e élet. Ekkor $|E(G+e)| = 1001$. 3 pont

A Turán tétel alapján, ha a $G+e$ gráf nem tartalmaz K_6-ot, akkor $|E(G+e)| \leq |E(T_{50,5})| = 1000$, ami itt nem teljesül, tehát a $G+e$ gráf tartalmaz K_6-ot. 3 pont

Ezért, ha most a $G+e$ gráfból elhagyjuk az e élet, még mindig lesz egy olyan részgráf, ami egy él híján egy K_6. 3 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$–re létezik egy $N(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, N(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan x, y, z egyforma színű, de különböző számok, $(1 \leq x, y, z \leq N(k))$, amelyekre $x + y = 2z$.

A Van der Waerden tétel szerint létezik olyan $M(k)$ szám, hogy akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, M(k)$ számokat k színnel, létezik egy három tagú, egyszínű számtani sorozat. 5 pont

Legyenek ennek tagjai, növekvő sorrendben, x, z, y. Ekkor $x + y = 2z$, éppen amit akartunk. Tehát ha $N(k)$-t $M(k)$-nak választjuk, az kielégíti a feltételeket. 5 pont

4. Adott egy 100 elemű H halmaz k darab 70 elemű részhalmaza, $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Tudjuk, hogy semelyik két halmaz uniója sem adja ki az alaphalmazt, vagyis $A_i \cup A_j \neq H$. Határozzuk meg k lehetséges legnagyobb értékét.

Legyen $\overline{A_i}$ A_i komplementere. Az $\overline{A_i}$ halmazok 30 eleműek, és a feltétel szerint ha $i \neq j$ akkor $\overline{A_i} \cap \overline{A_j} \neq \emptyset$. 3 pont
Tehát az Erdős-Ko-Rado tétel alapján $k \leq \binom{99}{29}$. 3 pont

Viszont $k = \binom{99}{29}$ darab halmazt meg is lehet adni a feltételeknek megfelelően: legyen 1 a 100 elemű H halmaz egyik eleme, és vegyük az összes olyan 70 elemű részhalmazt, amely nem tartalmazza 1-et. Ezek közül semelyik kettő uniója sem adja ki az alaphalmazt, (sőt, az összes halmaz uniója sem), és éppen $\binom{99}{70} = \binom{99}{29}$ darab ilyen részhalmaz van. 4 pont

5. G egy páros gráf A és B osztályokkal. Bármelyik A-beli csúcsnak legalább két szomszédja van B-ben, és semelyik három A-beli csúcsnak sincs közös szomszédja B-ben. Bizonyítsuk be, hogy $|A| \leq |B|$.

Legyen E az élek halmaza. Mivel minden A-beli csúcsnak legalább két szomszédja van B-ben, minden A-beli csúcs foka legalább 2, tehát $|E| \geq 2|A|$. 4 pont

Ugyanakkor, ha egy B-beli csúcs foka legalább 3 lenne, akkor lenne három A-beli pont, amelyeknek van közös szomszédja. Tehát minden B-beli csúcs foka legfeljebb 2, ezért $|E| \leq 2|B|$. 4 pont

Összevetve $2|A| \leq |E| \leq 2|B|$, $|A| \leq |B|$. 2 pont

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$. Tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, és $A \subset B$, akkor $|A| + |B| = 100$. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

1. megoldás: Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{ A \in \mathcal{F} \mid \text{van } B \in \mathcal{F} \text{ amelyre } A \subset B\}$$

és legyen

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_1.$$

2 pont

Az állítjuk, hogy $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is Sperner rendszert alkot. 2 pont

Tegyük fel, hogy $A, A' \in \mathcal{F}_1$ és $A \subset A'$. Mivel $A' \in \mathcal{F}_1$, létezik olyan $B \in \mathcal{F}$ amelyre $A' \subset B$. Tehát $A \subset A' \subset B$. A feltetelek szerint ekkor $|A| + |A'| = 100$ és $|A'| + |B| = 100$, ami egyszerre nem lehetséges. 2 pont

Most legyen $A \in \mathcal{F}_2$. Mivel $A \notin \mathcal{F}_1$, nem létezik olyan $B \in \mathcal{F}$ amelyre $A \subset B$. 2 pont

Mivel $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is Sperner rendszert alkot, a Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

2 pont

2. megoldás: Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{ A \in \mathcal{F} \mid |A| < 50\}$$

és legyen

$$\mathcal{F}_2 = \{ A \in \mathcal{F} \mid |A| \geq 50\}.$$

2 pont

Az állítjuk, hogy $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is Sperner rendszert alkot. 2 pont

Tegyük fel, hogy $A, A' \in \mathcal{F}_1$ és $A \subset A'$. Ekkor $|A| + |A'| = 100$ lenne, ami lehetetlen, mert $|A|$, $|A'| < 50$. 2 pont

Most tegyük fel, hogy $A, A' \in \mathcal{F}_2$ és $A \subset A'$. Ekkor $|A| + |A'| = 100$. Mivel $|A|$, $|A'| \geq 50$, ez csak úgy lehetséges, hogy $|A| = |A'| = 50$. Ekkor viszont nem lehet $A \subset A'$. 2 pont

Mivel $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is Sperner rendszert alkot, a Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

2 pont