Kombinatorika és gráfelmélet II
1. ZH, 2012. március 12. 10.15-11.45, J202
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 200 csúcsa és 300 éle van. Tudjuk, hogy a duálisa egyszerű. Bizonyítsuk be, hogy G–ben a maximális fokszám 3.

Jelölje $d_1, d_2, \dots, d_{200}$ a csúcsok fokszámait. Mivel G összefüggő, nincs izolált pontja, így $d_i \geq 1$. 1 pont
Ha lenne G–ben 1–fokú csúcs, akkor a duálisában lenne hurokél. 1 pont
Ha pedig lenne 2–fokú csúcs, akkor a duálisában lenne többszörös él. 1 pont
Tehát, mivel G duálisa egyszerű, $d_i \geq 3$. 1 pont
Viszont ekkor

$$600 = 2e = d_1 + d_2 + \cdots + d_{200} \geq 3 \cdot 200 = 600.$$

3 pont
Ez csak úgy lehetséges, ha minden fokszám PONTOSAN 3. Tehát a maximális fokszám is 3. 3 pont

2. G egy egyszerű gráf, e egy éle, és tudjuk, hogy ha G–ből elvesszük az e élt, akkor síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy G 6–listaszínezhető. (Vagyis $ch(G) \leq 6$.)

Első megoldás: Tegyük fel, hogy G–nek n csúcsa van. Ha $n \leq 6$, akkor az állítás triviális. 1 pont

Most tegyük fel, hogy $n > 6$, és kisebb értékekre már beláttuk az állítást. Legyen G egy n csúcsú, a feltételeket kielégítő gráf, és minden csúcshoz tekintsünk egy 6 hosszú színlistát. Jelölje $d_1, d_2, \dots, d_n$ a csúcsok fokszámait. Mivel $G \setminus e$ síkgráf, legfeljebb $3n - 6$ éle van. Tehát G–nek meg legfeljebb $3n - 5$ éle lehet. 2 pont

Ha minden $d_i \geq 6$, akkor $d_1 + d_2 + \cdots + d_n \geq 6n$, tehát G–nek legalább $3n$ éle lenne. De mivel legfeljebb $3n - 5$ éle van, ebből következik, hogy van egy csúcs, mondjuk v_1, amelynek a foka legfeljebb 5. 4 pont

Hagyjuk el v_1–et G–ből, legyen a kapott gráf G'. Erre is igaz, hogy van olyan éle, amelyet elhagyva síkgráfot kapunk, hiszen vagy tartalmazza e–t, vagy ha nem, akkor már eleve síkgráf. Tehát az indukciós feltevés alapján G' kiszínezhető az adott színlistákról. Tegyük vissza v_1–et, mivel legfeljebb 5 szomszédja van, ezért őt is ki tudjuk színezni a 6 hosszú listájáról. 3 pont

Második megoldás: Legyen az e él egyik végpontja x, α az egyik szín a színlistáján. Vegyük el x–et G–ből, a kapott gráf legyen G'. G' minden csúcsához tartozik egy 6 hosszú színlista, töröljük mindegyikből az α színt, amelyikben benne van. 5 pont

Most van egy síkgráfunk (hiszen az e él nincs G'–ben) és minden csúcsán egy 5 vagy 6 hosszú színlista. Thomassen tétele szerint G' csúcsai színezhetőek az adott listákról. 3 pont

Most pedig nyugodtan visszatehetjük x–et, α színnel, hiszen G' semelyik csúcsa sem α színű. 2 pont

3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - n(G) - 3t(G)$ mennyiség maximumát. (Ha G tetszőleges síkbarajzolt gráf lehet.)

1. Megoldás: Tudjuk, hogy minden síkbarajzolt gráfra $n(G) - e(G) + t(G) = 1 + k$, ahol k G komponenseinek a száma. Tehát $n(G) - e(G) + t(G) \geq 2$. 3 pont

Ennek alapján $e(G) - n(G) - 3t(G) = e(G) - n(G) - t(G) - 2t(G) \leq -2 - 2t(G) \leq -4$ hiszen $t(G) \geq 1$. 3 pont

-4 viszont könnyedén elérhető, ha G egy n csúcsú fa, akkor $e(G) - n(G) - 3t(G) = (n-1) - n - 3 = -4$. Tehát a válasz -4. 4 pont

2. Megoldás: Ha G nem összefüggő, akkor két komponenst összekötve éllel, $e(G)$ eggyel nő, a többi nem változik, tehát $e(G) - n(G) - 3t(G)$ eggyel nő. 3 pont

Ha viszont van egy kör G–ben, és ennek egy élét hagyjuk el, akkor $e(G)$ és $t(G)$ eggyel csökken, $n(G)$ nem változik, tehát $e(G) - n(G) - 3t(G)$ kettővel nő. 3 pont

Tehát $e(G)-n(G)-3t(G)$ akkor maximális, ha G összefüggő, és nincs benne kör, vagyis fa. Ekkor $e(G)-n(G)-3t(G) = (n-1) - n - 3 = -4$. Tehát a válasz -4. 4 pont

4. Tetszőleges G gráfra legyen $2G$ a következő gráf. Vesszük G két diszjunkt példányát, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a két példányban összekötjük. Legyen G' pedig a következő gráf. Vesszük G–nek és G komplementerének egy-egy diszjunkt példányat, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a két példányban összekötjük. Legyen S_n az n csúcsú csillag, vagyis egy csúcs, összekötve a többi $n-1$ csúccsal.

(a) Milyen n–re lesz a $2S_n$ gráf perfekt?

(b) Milyen n–re lesz a S'_n gráf perfekt?

(a) Az $2S_n$ gráf páros gráf: színezzük pirosra az első csillag közepét, és a második széleit (nem-közepét) és kékre a második csillag közepét, és az első széleit. Tehát minden n–re perfekt. 5 pont

(b) $n = 1$–re S'_n egy két csúcsú, egy élű gráf, perfekt. $n = 2$–re S'_n egy 3 hosszú (élű) út, az is perfekt. 2 pont

Tegyük fel, hogy $n \geq 3$, legyen v a csillag közepe, két szomszédja u és w. A komplementerben a megfelelő csúcsok legyenek v', u', w'. Ekkor S'_n–ben u, v, w, u' és w' éppen egy öt hosszú kört feszít. Tehát $n \geq 3$ esetén S'_n nem perfekt. 3 pont

5. Legyen G egy páros, síkbarajzolt gráf. Képezzük a G' gráfot a következő módon. Vegyünk fel egy-egy csúcsot G minden tartományában, és kössük össze a különböző szomszédos tartományoknak megfelelő csúcsokat. Ezenkívül kössünk össze minden tartománynak megfelelő csúcsot G azon csúcsaival, amelyek a megfelelő tartomány határán vannak. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G') \leq 6$.

Mutassunk olyan G páros, nem feltétlenül egyszerű, síkbarajzolt gráfot, amelyre a fenti módon képezett G' gráf kromatikus száma 5.

Legyen G'' a tartományoknak megfelelő csúcsok által G'–ben feszített gráf. Ekkor G'' majdnem izomorf G duálisával, G^*–gal: úgy kaphatjuk meg G''–t G^*–ból, hogy elhagyjuk G^* esetleges hurokéleit, és a többszörös élek helyett csak egyet húzunk be. 4 pont

Tehát a Négyszíntétel alapján G'' csúcsait kiszínezhetjük négy színnel. G eredeti csúcsait pedig kiszínezhetjük további két színnel, hiszen G páros. 3 pont

Ez egy jó hatszínezését adja a G' gráfnak. 1 pont

Legyen G–nek két csúcsa, összekötve 3 párhuzamos éllel. Ekkor a fenti módon képzett G' gráf éppen K_5 lesz. 2 pont

6. Legyen $G(V,E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V,E_1)$ perfekt, $G_2(V,E_2)$ páros gráf, és $|V| = 163$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes tizest, vagy egy üres tizest. (Tíz pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő.)

Ha G_1 kromatikus száma legalább 10, akkor a perfektsége miatt tartalmaz egy 10 csúcsú teljes gráfot, így G is. 3 pont

Tehát tegyük fel, hogy $\chi(G_1) \leq 9$. Színezzük ki G_1 csúcsait (V–t) 9 színnel. Mindegyik színosztály független halmazt alkot G_1–ben, és valamelyik színosztály legalább 19 pontot tartalmaz, legyen ezen csúcsok halmaza V'. 3 pont

V' G_2–ben egy páros gráfot feszít, így a két osztály közül valamelyik legalább 10 csúcsú. Ezek a csúcsok nincsenek összekötve sem G_1–ben, sem G_2–ben, tehát egy üres tizest alkotnak G–ben. 4 pont