Kombinatorika és gráfelmélet II
2. PótZH
2012. május 7. 8.00-9.30, IB 134

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 3$–ra

$$R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k}) \geq 2 \cdot R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k-1}) - 1.$$

($R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k})$ az a legkisebb R szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit akárhogy színezzük k színnel, lesz egy egyszínű háromszög.)

Legyen $R = R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k-1})$.

R definíciója alapján ki lehet színezni $k-1$ színnel a teljes $R-1$ csúcsú gráf éleit úgy, hogy ne legyen egyszínű háromszög. 2 pont

Tekintsünk egy ilyen színezett teljes $R-1$ csúcsú gráfot, az $1, 2, \ldots, k-1$ színekkel, és vegyük két példányát. A két példány közötti éleket színezzük a k-adik színre. 5 pont

Nyilvánvaló, hogy nincs egyszínű háromszög, és $2R-2$ csúcsú teljes gráf éleit színeztük k színnel.

Tehát $R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k}) - 1 \geq 2 \cdot R - 2$ vagyis

$$R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k}) \geq 2 \cdot R(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k-1}) - 1.$$

3 pont

2. A G gráfnak 40 csúcsa és 605 éle van. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz két éldiszjunkt 5 hosszú kört.

1. Megoldás: A Turán tétel alapján egy 40 csúcsú és 605 élű gráf tartalmaz egy teljes 5 csúcsú gráfot. 5 pont

Viszont egy teljes 5 csúcsú gráf éppen két éldiszjunkt 5 hosszú kör uniója. 5 pont

2. Megoldás: A Turán tétel alapján egy 40 csúcsú és 605 élű gráf tartalmaz egy teljes 5 csúcsú gráfot. 4 pont

Ebben található egy 5 hosszú kör. Hagyjuk el ennek az éleit, legyen a kapott 600 élű gráf G'. 2 pont

Ha G' is tartalmaz egy teljes 5 csúcsú gráfot, akkor ebből megint választhatunk egy 5 hosszú kört, és készen vagyunk. 2 pont

Ha nem tartalmaz, akkor megint a Turán tétel alapján, G' éppen a $T_{40,4}$ gráf, amelyben könnyen található 5 hosszú kör, és megint készen vagyunk. 2 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$–re létezik egy $M(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, M(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan x, y, z, u egyforma színű, de különböző számok, $(1 \leq x, y, z, u \leq M(k))$, amelyekre $x + y = z + u$.

1. Megoldás: A Van der Waerden tétel alapján létezik olyan $N(k)$, hogy ha az $1, 2, \ldots N(k)$ számokat kiszínezzük k színnel, akkor mindig található egy egyszínű, négy hosszú számtani sorozat, x, z, u, y. Ekkor viszont $x + y = z + u$, tehát $M(k) = N(k)$ kielégíti a feltételeket. 10 pont

2. Megoldás: Legyen $M(k) = (k+1)^{k+1} + k + 1$. Osszuk be az $1, 2, \ldots, M(k)$ számokat $(k+1)^k + 1$ darab blokkra, egy blokk $k+1$ egymás utáni számból áll. 3 pont

Egy blokkot összesen $(k+1)^k$–féleképpen lehet k színnel színezni. 2 pont

Mivel $(k+1)^k + 1$ blokkunk van, van köztük kettő, amelyek ugyanúgy vannak kiszínezve, mondjuk B_1 és B_2. Viszont egy blokkon belül kell hogy legyen két egyforma színű szám, B_1-ben legyenek ezek x és z, $x < z$. 3 pont

Legyen B_2-ben az x-nek megfelelő szám u, a z-nek megfelelő szám y. Ekkor x, y, z és u egyszínűek, különbözőek, és $x + y = z + u$. 2 pont

4. Adott egy 100 elemű H halmaz k darab részhalmaza, mindegyik vagy 20, vagy 30 elemű. Semelyik két adott részhalmaz sem diszjunkt. Bizonyítsuk be, hogy k lehetséges legnagyobb értéke

$$\binom{99}{29} + \binom{99}{19}.$$

Ha csak a 20 elemü részhalmazokat nézzük, mivel ezek közt sincs két diszjunkt, az Erdős-Ko-Rado tétel alapján ezekből legfeljebb $\binom{99}{19}$ van. 4 pont

Hasonlóan a 30 elemü részhalmazokból meg legfeljebb $\binom{99}{29}$ van. Tehát $k \leq \binom{99}{29} + \binom{99}{19}$. 2 pont

Ennyi halmazt viszont meg is lehet adni a feltételeknek megfelelően. Legyen 1 az alaphalmaz egyik eleme, és tekintsük az összes olyan 20 és 30 elemű részhalmazt, amely az 1-et tartalmazza. 4 pont

5. G egy páros gráf A és B osztályokkal. $|A| = 11$, $|B| = 10$. Tetszőleges két A-beli csúcsnak pontosan két közös szomszédja van B-ben. Bizonyítsuk be, hogy van olyan két A-beli csúcs, amelyeknek pontosan ugyanazok a B-beli csúcsok a szomszédai.

Legyenek A elemei $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$. Legyen $B_i \subset B$ a_i szomszédainak a halmaza. Tegyük fel, hogy semelyik két A-beli csúcsnak sem pontosan ugyanazok a B-beli csúcsok a szomszédai. Ekkor a $B_1, B_2, \ldots, B_{11}$ halmazok mind különbözőek. 5 pont

Tehát van egy 10 elemű halmaznak 11 különböző részhalmaza azzal a tulajdonsággal, hogy $i \neq j$ esetén $|B_i \cap B_j| = 2$. Viszont a Fisher egyenlőtlenség szerint ekkor legfeljebb csak 10 darab halmazunk lehetne, ami ellentmondas, hiszen 11 halmazunk van. 4 pont

Tehát kell lenni két olyan A-beli csúcsnak, amelyeknek pontosan ugyanazok a B-beli csúcsok a szomszédai. 1 pont

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$. Tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, és $A \subset B$, akkor $1 \in B$ és $1 \notin A$. Bizonyítsuk be, hogy a.)

$$|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

b.)

$$|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}.$$

a.) Legyen

$$\mathcal{F}_1 = \{\ A \in \mathcal{F} \mid 1 \in A\}$$

és legyen

$$\mathcal{F}_2 = \{\ A \in \mathcal{F} \mid 1 \notin A\}.$$

3 pont

Világos, hogy $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is Sperner rendszert alkot. 2 pont

Ezért a Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

2 pont

b.) Most vegyük észre, hogy $\mathcal{F}_2$ igazából a $\{ 2, 3, \ldots, n \}$ $n-1$ elemű alaphalmazon vett Sperner rendszer. Legyen

$$\mathcal{F}_1' = \{ A \setminus \{1\} \mid A \in \mathcal{F}_1 \}.$$

Ekkor $\mathcal{F}_1'$ ugyancsak a $\{ 2, 3, \ldots, n \}$ $n-1$ elemű alaphalmazon vett Sperner rendszer.

Ezért

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| = |\mathcal{F}_1'| + |\mathcal{F}_2| \leq 2\binom{n-1}{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}.$$