Kombinatorika és gráfelmélet II

1. PótZH

2012. május 7. 8.00-9.30, IB 134

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 100 csúcsa és 201 éle van. Duálisa, G^*, egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G–ben van legalább 6 fokú csúcs.

Tegyük fel, hogy G-ben egy v csúcs foka páratlan. Ekkor a v-hez illeszkedő tartományoknak megfelelő csúcsokon G^*-ban végigmehetünk egy páratlan körsétával. Mivel G^* egyszerű páros gráf, ez lehetetlen, tehát nincs G-ben páratlan fokú csúcs. 3 pont

Ha G-ben egy v csúcs foka 2, az G^*-ban egy kétszeres élet jelent, ami megint lehetetlen. 2 pont

Ha nem lenne legalább 6 fokú csúcs G-ben, akkor az eddigiek alapján minden fok PONTOSAN 4 lenne. 3 pont

Ekkor viszont G-nek $4 \cdot 100/2 = 200$ éle lenne. Mivel ennél több éle van, nem minden fokszám pontosan 4, ezért van legalább 6 fokú csúcs. 2 pont

2. G egy egyszerű gráf, v egy csúcsa, és tudjuk, hogy ha G–ből elvesszük a v csúcsot, akkor síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy G 6–listaszínezhető. (Vagyis $ch(G) \leq 6$.)

Tegyük fel, hogy minden v_i csúcson adott egy $L(v_i)$ 6 hosszú színlista, és $v = v_1$. Legyen α $L(v_1)$ egyik eleme. 1 pont

Minden $2 \leq i \leq n$-re legyen $L'(v_i) = L(v_i) \setminus \alpha$, vagyis töröljük ki az $L(v_i)$ listáról az α színt, ha szerepel a listán. 4 pont

A $G' = G \setminus v$ gráf síkgráf, és a csúcsokhoz rendelt $L'(v_i)$ listák legalább 5 hosszúak. Tehát Thomassen tétele alapján G' kiszínezhető az L' listákról. 3 pont

Mivel egyik csúcs sem kaphatta az α színt, a $v = v_1$ csúcsot α színűre színezve visszatehetjük, és megkapjuk G egy színezését az L lisákról. 2 pont

3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, ..., F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 3)$$

mennyiség maximumát ha G tetszőleges 100 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

Legyen $n(G)$, $e(G)$, $t(G)$, $k(G)$ G csúcsainak, éleinek, tartományainak, és komponenseinek a száma.

1. Megoldás: Mivel $\sum_{i=1}^{t} |F_i| = 2e$ és $\sum_{i=1}^{t} (-3) = -3t$,

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 3) = 2e - 3t.$$

3 pont

Tudjuk, hogy minden síkbarajzolt gráfra $n - e + t = 1 + k$. Tehát $s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 3) = 2e - 3t = 2e - 2t - t = 2n - 2 - 2k - t = 198 - 2k - t \leq 195$ hiszen $n = 100$, $k \geq 1$ és $t \geq 1$. 4 pont

195 viszont könnyedén elérhető, ha $k = 1$ és $t = 1$, vagyis G egy 100 csúcsú fa. 3 pont

2. Megoldás: Ha G nem összefüggő, akkor két komponenst összekötve éllel, $t(G)$ nem változik, sőt, F_1, F_2, ..., F_t közül is csak egy változik, a határán levő élek száma kettővel nő. (Az új él mindkét oldalról határolja.) Tehát $s(G)$ kettővel nő. 4 pont

Most tegyük fel, hogy van egy kör G-ben, és ennek egy élét hagyjuk el. Ekkor két tartományból mondjuk az F_1 és F_2 tartományokból egy F tartomány lesz. Mivel $|F_1| + |F_2| = |F| + 2$, $(|F_1| - 3) + (|F_2| - 3) + 1 = (|F| - 3)$, vagyis $s(G)$ eggyel nő. 4 pont

Tehát $s(G)$ akkor maximális, ha G összefüggő, és nincs benne kör, vagyis fa. Ekkor $n = 100$, $e = 99$, $t = 1$, $|F_1| = 2e = 198$, ennek alapján $s(G) = |F_1| - 3 = 195$. 2 pont

4. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $|i - j| = 3$, 7, 11, vagy 19. Milyen n értékekre lesz a G gráf perfekt?

Vegyük észre, hogy a kapott gráf páros, a két osztály a páros és a páratlan indexű csúcsok, Hiszen minden $v_i v_j$ élre i és j közül az egyik páros, a másik páratlan. 6 pont

Viszont tudjuk, hogy minden páros gráf perfekt, tehát G minden n értékre perfekt. 4 pont

5. A G gráf le van rajzolva a síkra úgy, hogy pontosan 10 él–metszés van. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 14$.

1. Megoldás: Mind a 10 metszésnél válasszuk ki az egyik élet, legyenek ezek $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$. Ezenkívül mindegyiknek válasszuk ki valamelyik végpontját, legyenek ezek $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$. Ha ezeket az éleket elhagyjuk, akkor megszűnik az összes él–metszés, vagyis a $G' = G \setminus \{ e_1, e_2, \ldots, e_{10} \}$ gráf síkgráf. 3 pont

A Négyszíntétel alapján G' kiszínezhető az 1, 2, 3, 4 színekkel. Ez majdnem jó G színezésére is, csak az lehet a probléma, hogy az $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$ élek közül néhánynak egyforma színű a két végpontja. 2 pont

Adjunk a $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ csúcsoknak 10 új színt, legyen a v_i csúcs új színe $i + 4$. 3 pont

Ezzel G színezését kaptuk 14 színnel, tehát $\chi(G) \leq 14$. 2 pont

2. Megoldás: Egy kicsit erősebb állítás bizonyítunk, indukcióval: ha G n csúcsú gráf lerajzolható *legfeljebb* 10 metszéssel, akkor $\chi(G) \leq 14$. Ez nyilvánvaló, ha $n \leq 14$, tegyük fel, hogy $n \geq 15$, és az állítást beláttuk $n - 1$-re. 1 pont

Mind a 10 metszésnél válasszuk ki az egyik élet, legyenek ezek $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$. Ha ezeket az éleket elhagyjuk, akkor megszűnik az összes él–metszés, vagyis a $G' = G \setminus \{ e_1, e_2, \ldots, e_{10} \}$ gráf síkgráf. 3 pont

Tegyük fel, hogy G-nek n csúcsa van. Ekkor, mivel G' síkgráf, legfeljebb $3n - 6$ éle van, tehát G-nek is legfeljebb $3n + 4$ éle lehet. 1 pont

Tegyük fel, hogy minden csúcs foka legalább 14. Ekkor G-nek legalább $7n$ éle van, csakhogy $7n > 3n + 4$, tehát van olyan csúcs, amelynek a foka legfeljebb 13. 2 pont

Hagyjuk el ezt a csúcsot, a maradék gráf természetesen lerajzolható legfeljebb 10 metszéssel, az indukciós feltevés szerint tehát kiszínezhető 14 színnel. 1 pont

Helyezzük vissza az elhagyott csúcsot, mivel legfeljebb 13 szomszédja volt, őt is ki tudjuk színezni a 14 szín közül valamelyikkel. 2 pont

6. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ perfektek, $|V| = 126$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes hatost, vagy egy üres hatost. (Hat pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő sincs.)

Mivel G_1 perfekt, $\chi(G_1) = \omega(G_1)$. Ha $\chi(G_1) \geq 6$, akkor tehát G_1 tartalmaz egy teljes 6 csúcsú részgráfot, ez G-ben is egy teljes hatos, így készen vagyunk. 3 pont

Feltehetjük tehát, hogy $\chi(G_1) \leq 5$. Tekintsük egy színezését legfeljebb 5 színnel. Minden színosztály egy független halmaz, együttvéve lefedik a 126 csúcsot, tehát valamelyik közülük legalább 26 csúcsú. 3 pont

Legyen G_2' G_2-nek ezen 26 csúcs által feszített részgráfja. G_2' perfekt, ezért, hasonlóan az előző esethez, ha $\chi(G_2') \geq 6$, akkor G_2' tartalmaz egy teljes 6 csúcsú részgráfot, és készen vagyunk. 2 pont

Végül ha $\chi(G_2') \leq 5$, akkor tekintsük 5–színezését, valamelyik színosztálynak legalább 6 csúcsa van, ez pedig egy független ponthalmaz G_1-ben is, G_2-ben is, így G-ben is. 2 pont