Kombinatorika és gráfelmélet II

2. Aláíráspótló ZH

2012. május 15. 8.00-9.30, IB 028

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A feladatok sorrendje nem feltétlenül tükrözi azok nehézségét. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 3$–ra

$$R(\underbrace{4,4,\ldots,4}_{k}) \geq 3 \cdot R(\underbrace{4,4,\ldots,4}_{k-1}) - 2.$$

($R(\underbrace{m,m,\ldots,m}_{k})$ az a legkisebb R szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes gráf éleit akárhogy színezzük k színnel, lesz egy m csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.)

2. A G gráfnak 40 csúcsa és 407 éle van. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz három éldiszjunkt háromszöget.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 2$–re létezik egy $M(k)$ a következő tulajdonsággal. Akárhogyan színezzük ki az $1, 2, \ldots, M(k)$ számokat k színnel, léteznek olyan x, y, a, b, c egyforma színű, de különböző számok, ($1 \leq x, y, a, b, c \leq M(k)$), amelyekre

$$\frac{x+y}{2} = \frac{a+b+c}{3}.$$

4. Adott egy 100 elemű H halmaz k darab részhalmaza, mindegyik vagy 30, vagy 80 elemű. Semelyik két adott részhalmaz sem diszjunkt. Bizonyítsuk be, hogy k lehetséges legnagyobb értéke

$$\binom{99}{29} + \binom{100}{20}.$$

5. G egy páros gráf A és B osztályokkal. $|A| = 11$, $|B| = 10$. Tetszőleges két A-beli csúcsnak pontosan két közös szomszédja van B-ben. Bizonyítsuk be, hogy van olyan A-beli csúcs, amelyeknek pontosan két B-beli szomszédja van.

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$. Tudjuk, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$, és $A \subset B$, akkor $|A| = 1$.
a.) Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + n$$

b.) Adjunk meg $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} + n$ részhalmazt, amelyek teljesítik a feltételt.