

Kombinatorika és gráfelmélet II
1. Aláíráspótló ZH
2012. május 15. 8.00-9.30, IB 028

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan és helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A feladatok sorrendje nem feltétlenül tükrözi azok nehézségét. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. Egy összefüggő G síkbarajzolt gráfnak 100 csúcsa van. Duálisa, G^* , egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G^* -nak legalább 102 csúcsa van.

2. Legyen G egy síkgráf a v_1, v_2, \dots, v_n csúcsokon, és legyen H egy síkgráf az u_1, u_2, \dots, u_n csúcsokon. Legyen $G + H$ a következő gráf. Tekintsük G és H egy-egy példányát, és minden i -re ($1 \leq i \leq n$) kössük össze v_i -t u_i -vel. (Vagyis G -ből, H -ből, és egy teljes párosításból áll.)

Bizonyítsuk be, hogy a $G + H$ gráf listaszínezési száma legfeljebb 10. (Vagyis $ch(G + H) \leq 10$.)

3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, \dots, F_t a tartományok (beleértve a végtelen tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg a

$$s(G) = \sum_{i=1}^t (|F_i| - 1)$$

mennyiség maximumát ha G tetszőleges 100 csúcsú síkbarajzolt gráf lehet.

4. Legyenek G csúcsai v_1, v_2, \dots, v_n , v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $|i - j| < 100$. Milyen n értékekre lesz a G gráf perfektné?

5. G olyan gráf, hogy három élet elvéve síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 7$.

6. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, $G_1(V, E_1)$, $G_2(V, E_2)$, és $G_3(V, E_3)$ perfektné, $|V| = 626$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy teljes hatost, vagy egy üres hatost. (Hat pontot, amelyek vagy mind össze vannak kötve, vagy semelyik kettő sincs.)