Kombinatorika és gráfelmélet 2.

8. gyakorlat, 2012. április 4.

Turán-tétel, hipergráfok

1. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincsen benne
   - kör?
   - páratlan kör? (páros lehet)
   - páros kör? (páratlan lehet)
   - 2 élből álló út?
   - sem 3 élből álló út, sem kör?
   - feszítőfa?
2. Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük tíz embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.
3. Igazoljuk, hogy az n-csúcsú, m-osztályú $T_{n,m}$ Turán-gráf pontosan akkor nem tartalmaz Hamilton-kört, ha $m = 2$ és n páratlan.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfban nincs háromszög, akkor $|E(G)| \leq \alpha(G)\tau(G)$. Mikor áll egyenlőség?
5. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_n$ síkbeli vektorok, $|v_i| \geq 1$. Legalább hány párra lesz $|v_i + v_j| \geq 1$?
6. Legkevesebb hány csúcsa lehet egy háromszögmentes, egyszerű G gráfnak, ha $|E(G)| \geq 2|E(K_k)|$?
7. Adott a síkon n, nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható egységnyi távolságra levő pontpárok száma?
8. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ egységtávolságot határozhat meg, ahol c alkalmas konstans.
9. Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú gráfnak, ha élei kiszínezhetők úgy két színnel, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög?
10. Egy n tagú társaságban eredetileg senki nem ismer senkit. Minimálisan hány bemutatással (egy bemutatás mindig pontosan két ember egymásnak való bemutatását jelenti) érhetjük el, hogy teljesüljenek a következő feltételek: 1. Bármely három ember között van kettő, akik ismerik egymást (tehát be lettek mutatva); 2. Bárki bárkinek (olyannak is, akit nem ismer) küldhet üzenetet úgy, hogy az üzenetet egymást ismerő (tehát egymásnak bemutatott) emberek adják tovább egymásnak, s az végül célba jut.
11. Egy 49 csúcsú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy pontosan 8 is lehet.
12. Legyen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, ahol minden $p_i > 1$ és p_i prímszám. Hány osztóját választhatjuk ki n-nek úgy, hogy semelyik két kiválasztott osztó se legyen relatív prím?
13. Artúr király n lovagját felderítő utakra küldi. Minden nap k lovag megy portyázni. Ugyanaz a csapat nem mehet kétszer és – hogy az információkat mindig mindenki megtudja – nem lehet két csapat, aminek nincs közös tagja. Hány napig lehet így csapatokat összeállítani?
14. Adott síkon m egyenes. Tegyük fel, hogy az egyenesek nem illeszkednek ugyanarra a pontra, es hogy az egyenesek közül semelyik kettő sem párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy ezen egyenesek legalább m metszéspontot határoznak meg!

15. Növényvédő szerekkel való kísérletezéshez a következőkre van szükség. Legyen m féle növény és n különböző földterület. Minden területen pont k féle növényt ültetünk, minden növényt pont r területre ültetünk, és minden nyövénypárra pont l olyan terület van, ahol mindenkettő szerepel. Lássuk be, hogy $n \geq m$.

16. Egy 30 fős társaságban mindenki legalább 20 embert ismer a többiek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk ki a társaság tagjai közül 4 embert, közülük kiválasztható kettő olyan, akik nem ismerik egymást. A társaság három tagja Bakács úr, Szakács úr és Takács úr. Bakács úr nem ismeri sem Szakács urat, sem Takács urat. Ismeri-e egymást Szakács úr és Takács úr?

17. Egy 100 elemű halmaznak 20 és 80 elemű részhalmazait választjuk ki úgy, hogy bármely kettő metszi egymást. Legfeljebb hány részhalmaz lehet így kiválasztani?

Házi feladat

1. Legyen adott a térben 40 tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy ezek közül kiválasztható éppen egységnyi távolságra levő pontpárok száma legfeljebb 600.

2. Van néhány k elemű halmazunk, bármely kettő pontosan l pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik elemet legfeljebb csak k halmaz tartalmazza.