Kombinatorika és gráfelmélet 2.

7. gyakorlat, 2012. március 21.

Ramsey elmélet

1. Bizonyítsuk be, hogy $R(3,3,3) \leq 17$ és azt is, hogy $R(3,4) = 9$.
2. Igazoljuk, hogy $c \geq 3$ esetén $R_t(n_1, n_2, \ldots, n_c) \leq R_t(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, R_t(n_{c-1}, n_c))$ teljesül. ($R = R_t(n_1, n_2, \ldots, n_c)$ az a legkisebb R szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes t–uniform hipergráf éleit az $1, 2, \ldots, c$ színekkel színezve valamilyen i–hez található olyan n_i darab csúcs, amelyeken az összes él (csúcs–t-es) i–színű.)
3. Igazoljuk, hogy $R_3(4,4) \leq 21$.
4. Legyen a_n a természetes számok tetszőleges végtelen sorozata. Mutassuk meg, hogy talalható akármilyen hosszú részsorozat, amelyben bármely két elem relatív prím, vagy semelyik két elem sem relatív prím.
5. Kiszínezhetők-e az egész számok két színnel úgy, hogy ne létezzen egyszínű végtelen számtani sorozat? Hát mértani?
6. Mutassunk olyan $(k-1)^2$ pontú gráfot, amelyben nincs sem teljes k-as sem üres k-as!
7. Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy mindkét színt használta. Mutassuk meg, hogy mindenképpen keletkezett egymástól egységnyi távolságban levő pontpár, melynek egyik tagja piros, a másik zöld! Igaz-e, hogy a sík ilyen kiszínezésekor biztosan található olyan egységoldalú szabályos háromszög, aminek csúcsai egyszínűek?
8. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy a Van der Waerden tétel igaz 2 szín felhasználásával, mutassuk meg ebből, hogy igaz 3 színnel is, sőt több színnel is.
9. Mutassuk meg, hogy ha G n csúcsú, egyszerű gráf, akkor $\max(\alpha(G), \omega(G)) \geq \lceil \log_4 n \rceil$.
10. (Végtelen Ramsey tétel) Egy végtelen sok csúcsú teljes gráf éleit kiszíneztük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van egy végtelen sok csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.
11. Döntsük el, hogy igaz-e a következő állítás. Minden $n \geq 1$–hez van olyan N, hogy akárhogyan színezzük ki az N elemű halmaz összes részhalmazát két színnel, található olyan n elemű részhalmaz, amelynek az összes részhalmaza ugyanolyan színű.
12. Legyen $H(V, E)$ egy k–uniform hipergráf, amelynek kevesebb mint 2^{k-1} éle van. Bizonyítsuk be, hogy H csúcsai kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy semelyik él sem egyszínű.

Házi feladat

1. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget: $R_3(k,l) \leq R_2(R_3(k-1,l), R_3(k,l-1)) + 1$.
2. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha $n > N(k)$ és az $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz részhalmazait k színnel színezzük, akkor léteznek az $[n]$ halmaznak olyan diszjunkt X_1 és X_2 részhalmazai, hogy X_1, X_2 és $X_1 \cup X_2$ színe megegyezik.