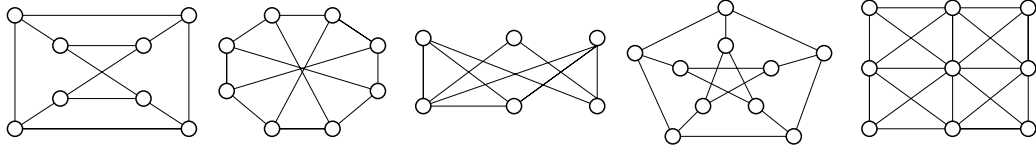


## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

3. gyakorlat, 2012. február 22.

*Kuratowski tétel, Fáry-Wagner tétel, dualitás*

1. Síkbarajzolhatók-e a  $K_6$ ,  $K_{4,2}$ ,  $K_{4,3}$ ,  $K_5 - e$ ,  $K_{3,3} - e$ ,  $\overline{C_7}$  gráfok? Hát az alábbiak?



- Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
  - a minimális fokszám legfeljebb 5;
  - ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.
- Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
- Mutassuk meg, hogy nem létezik olyan konvex poliéder, aminek minden oldala hatszög.
- Jelölje  $cr(G)$  a  $G$  gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkeresztezések lehetséges minimális számát. Mennyi  $cr(K_{4,4})$  értéke?
- Mutassuk meg, hogy a  $K_6$ , és a  $K_{4,4}$  gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  síkbarajzolt gráf, akkor  $G$ -be tetszőleges élt behúзва tóruszra rajzolható gráfot kapunk.
- Van-e olyan egyszerű síkbarajzolható gráf, melynek feleannyi csúcsa van, mint a duálisának?
- Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!
- Mutassunk olyan síkbarajzolt gráfot, ami nem feltétlenül duálisa a duálisának.
- Mutassunk példát olyan  $n$  csúcsú gráfra, aminek exponenciálisan sok különböző duálisa van. Más szóval, létezik olyan  $N$  pozitív egész és  $c > 1$  konstans, hogy tetszőleges  $n > N$  esetén megadható olyan  $n$  csúcsú gráf, aminek legalább  $c^n$  páronként nem izomorf duálisa van.

### Házi feladat.

- Mennyi  $cr(K_6)$  értéke?
- Bizonyítsuk be hogy  $cr(K_{5,5}) \geq 11$ .