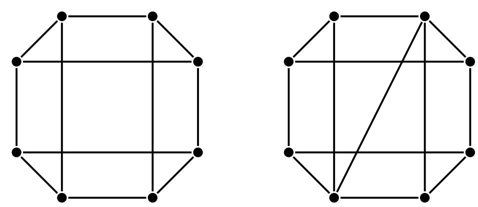
Kombinatorika és gráfelmélet 2.

1. gyakorlat, 2012. február 8.
Perfekt gráfok

1. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf.
2. Legyenek a G_n gráf csúcsai az $1, 2, 3, \ldots, n$ számok, és legyen ij él, ha i és j relatív prímek. Határozzuk meg a $\chi(G)$ és $\omega(G)$ paramétereket. Perfekt-e a G_n gráf?
3. Bizonyítsuk be, hogy az intervallumgráfok komplementerei perfektek. (a Gyenge és Erős Perfekt Gráf Tételek nélkül)
4. Bizonyítsuk be, hogy a páros gráfok komplementerei perfektek. (a Gyenge és Erős Perfekt Gráf Tételek nélkül)
5. Képezzük a G' gráfot a G perfekt gráfból úgy, hogy egy G-től diszjunkt v csúcsot összekötünk G egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy G' is perfekt gráf.
6. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8-as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos G-ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy G perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?
7. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor perfekt, ha G minden G' feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami G' minden maximális méretű klikkjét metszi.
8. a) Van-e olyan gráf, ami intervallumgráf, de nem egy intervallumgráf komplementere.
   b) Van-e olyan gráf, ami egy intervallumgráf komplementere, de nem intervallumgráf.
9. Írjuk le azokat a G gráfokat, amelyeknek minden H részgráfjára $\omega(H) = \chi(H)$.
10. Legyen G olyan n csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy $n-1$ nem lehet prímszám.
11. A G gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.
12. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



13. Legyen adott egy T fa és ennek $F_1, \ldots, F_n$ részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \ldots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j $(i \neq j)$ akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy G perfekt!
14. Nevezzünk egy gráfot keresztbe metszőnek, ha tetszőleges nem bővíthető klikkje és tetszőleges nem bővíthető független halmaza tartalmaz közös pontot. G öröklődően keresztbe metsző, ha minden feszített részgráfja keresztbe metsző. Mutassuk meg, hogy egy gráf akkor és csak akkor öröklődően keresztbe metsző, ha nem tartalmaz P_4-gyel (azaz 4 csúcsú úttal) izomorf feszített részgráfot. (Ne használjuk az erős perfekt gráf tételt.)

    Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban nincs P_4-gyel izomorf feszített részgráf, akkor a gráf perfekt.
15. Helyettesítsük a G perfekt gráf v csúcsát egy H perfekt gráffal, azaz a $G-v$-től diszjunkt H gráf minden csúcsát kössük össze v minden szomszédjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott G' gráf perfekt.

Házi feladat

1. Perfekt-e az $L(K_n)$ gráf?
2. Tegyük fel, hogy G perfekt gráf, és G csúcsainak X részhalmazára az igaz, hogy X bármely pontja szomszédos $V(G) \setminus X$ tetszőleges pontjával. Bizonyítsuk be, hogy az a G' gráf is perfekt, amit úgy kapunk, hogy töröljük G-ból az X és $V \setminus X$ között futó éleket.