# **Kombinatorika és gráfelmélet 2.**

12. gyakorlat, 2012. május 2.

*Generátorfüggvények*

1. Bizonyítsuk be, hogy $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ ill., hogy $F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$. ($F_n$ a Fibonacci sorozat $n$-dik elemét jelöli.)
2. Mutassuk meg, hogy $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.
3. Mutassuk meg, hogy $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1},$.
4. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_1 = 0 \;\; a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ rekurziót.
5. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = -3 \;\; a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ rekurziót.
6. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0 \;\; a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ rekurziót.
7. Hányféleképpen mehetünk fel egy $n$ fokból álló lépcsőn egyes és kettes lépésekkel?
8. Hányféleképp lehet lefedni egy $2 \times n$-es táblát $1 \times 2$-es és $2 \times 2$-es dominók felhasználásával?
9. Oldjuk meg az $a_0 = 0,\; a_1 = 0,\;\; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ rekurziót.
10. Legyen $a_1 = 0$ és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + n^2 - 1$. Adjuk meg $a_n$ értékét zárt alakban. Ugyanez a feladat $a_1 = -1$ és $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ esetén.
11. Oldjuk meg az $a_0 = 1,\;\; a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ rekurziót.
12. Legyen $g_0 = 1$ és $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \ldots + (n-1)g_1 + ng_0$. Adjuk meg $g_n$-t zárt alakban.
13. Mi a generátorfüggvénye az 1, 1, 1, ..., az 1, 2, 4, 8, ..., az 1, 2, 3, 4, ... és az 1, 0, 1, 0, 1, ... sorozatoknak?
14. Hogyan írhatók fel a $c_n$ sorozat elemei az $a_n$, és $b_n$ sorozat elemeivel, ha generátorfüggvényeikre teljesül, hogy $C(x) = A(x)B(x)$.
15. Adjunk lineáris rekurziót az $a_n = F_{2n}$ sorozatra.

**Házi feladat**

1. Legyen az $a_0, a_1, \ldots$ sorozatra $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = x$. Határozzuk meg, hogy milyen $x$–re lesz $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
2. Adjuk meg állandó együtthatós lineáris rekurzióval $c_n$-t, ha $c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{-\sqrt{17}-3}{2}\right)^n$.
3. Jelentse $g(n)$ az origóból induló olyan önmagát nem metsző $n$ hosszú séták számát, melyekben minden lépés egy egységnyi északi, keleti vagy nyugati irányban. Fejezzük ki $g(n)$ értékét!