

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

11. gyakorlat, 2012. április 25.

Generátorfüggvények

1. Bizonyítsuk be, hogy $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ ill., hogy $F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$. (F_n a Fibonacci sorozat n -dik elemét jelöli.)
2. Mutassuk meg, hogy $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$.
3. Mutassuk meg, hogy $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$.
4. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ rekurziót.
5. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = -3, a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ rekurziót.
6. Oldjuk meg az $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ rekurziót.
7. Hányféleképpen mehetünk fel egy n fokból álló lépcsőn egyes és kettős lépésekkel?
8. Hányféleképp lehet lefedni egy $2 \times n$ -es táblát 1×2 -es és 2×2 -es dominók felhasználásával?
9. Oldjuk meg az $a_0 = 0, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ rekurziót.
10. Legyen $a_1 = 0$ és $n \geq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + n^2 - 1$. Adjuk meg a_n értékét zárt alakban. Ugyanez a feladat $a_1 = -1$ és $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ esetén.
11. Oldjuk meg az $a_0 = 1, a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ rekurziót.
12. Legyen $g_0 = 1$ és $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \dots + (n-1)g_1 + ng_0$. Adjuk meg g_n -t zárt alakban.
13. Mi a generátorfüggvénye az $1, 1, 1, \dots$, az $1, 2, 4, 8, \dots$, az $1, 2, 3, 4, \dots$ és az $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ sorozatoknak?
14. Hogyan írhatók fel a c_n sorozat elemei az a_n , és b_n sorozat elemeivel, ha generátorfüggvényeikre teljesül, hogy $C(x) = A(x)B(x)$.

Házi feladat

1. Legyen az a_0, a_1, \dots sorozatra $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = x$. Határozzuk meg, hogy milyen x -re lesz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.
2. Adjuk meg állandó együtthatós lineáris rekurzióval c_n -t, ha $c_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{17}-3}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \left(\frac{-\sqrt{17}-3}{2} \right)^n$.