Kombinatorika és gráfelmélet II
2. pótZH, 2011. május 11. 12.15-13.45, H406
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. a. Bizonyítsuk be, hogy $R(3,3,3) \geq 11$.
b. Bizonyítsuk be, hogy $R(k,k,k) - 1 \geq (k-1)(R(k,k) - 1)$.
($R(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ a legkisebb R szám azzal a tulajdonsággal, hogy egy teljes R csúcsú gráf éleit akárhogy színezzük az $1, 2, \ldots, m$ színekkel, valamilyen i–re lesz egy k_i csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle i színű.)

a. Vegyük az öt csúcsú teljes gráfot, amelyben egy öt hosszú kör éleit kékkel, a többi élet (ezek szintén egy öt hosszú kört alkotnak) pedig pirossal színezzük. Természetesen nincs egyszínű háromszög. 2 pont

Most vegyük ennek a színezett gráfnak két példányát, és a köztük futó éleket színezzük zöldre. 2 pont

Így egy 10 csúcsú teljes gráf éleit kiszíneztük három színnel úgy, hogy nincs egyszínű háromszög. Tehát $R(3,3,3) \geq 11$. 1 pont

b. $R(k,k)$ definíciója szerint az $R(k,k) - 1$ csúcsú teljes gráf élei kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy ne legyen egyszínű teljes k–as. 1 pont

Vegyünk ebből a színezett teljes gráfból $k-1$ példányt, és a különböző példányok között futó éleket színezzük zöldre. 2 pont

Ebben a színezett gráfban nincs egyszínű teljes k–as: pirossal illetve kékkel csak egy $R(k,k) - 1$–es részben lehetne de a feltevés szerint ott nincs. Zöldben pedig azért nem lehet, mert egy teljes zöld részgráfnak nem lehet két csúcsa ugyanabban az $R(k,k) - 1$–es részben, viszont csak $k-1$ különböző $R(k,k) - 1$–es rész van. 2 pont

2. a. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $k \geq 2$ egészhez létezik egy $S(k)$ szám a következő tulajdonsággal. Akárhogyan kiszínezzük az $1, 2, \ldots, S(k)$ számokat k színnel, található három különböző egyszínű szám, $1 \leq x, y, z \leq S(k)$ úgy, hogy z osztója $x + y$–nak.
b. Bizonyítsuk be, hogy $S(2) \leq 7$.

a. 1. megoldás: Schur tétele szerint minden k–hoz létezik olyan $Schur(k)$ szám, hogy akárhogyan kiszínezzük az $1, 2, \ldots, Schur(k)$ számokat k színnel, található három különböző egyszínű szám, $1 \leq x, y, z \leq Schur(k)$ úgy, hogy $x + y = z$. Ez természetesen kielégíti a feladat követelményeit, tehát $S(k) \leq Schur(k)$. 5 pont

a. 2. megoldás: k–ra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. $k = 1$–re az állítás triviális, $S(1) = 3$. Tegyük fel, hogy $S(k-1)$ létezését már beláttuk. 1 pont

Bebizonyítjuk, hogy $S(k) \leq (k+1)S(k-1)^k$. Színezzük ki az $1, 2, \ldots, (k+1)S(k-1)^k$ számokat k színnel. 1 pont

Ha az első $S(k-1)$ szám között csak $k-1$ szín fordul elő, akkor az indukciós feltevś miatt készen vagyunk. 1 pont

Tehát vannak $x_1, x_2, \ldots, x_k$ számok amelyekre $x_i \leq S(k-1)$ és x_i az i–edik színre van színezve. Legyen $x = x_1 \cdot x_2 \cdots x_k$, nyilván $x < S(k-1)^k$. 1 pont

Az $x, 2x, \ldots (k+1)x$ számok között van két egyszínű, mondjuk ax és bx egyaránt i–színűek. Ekkor az x_i, ax, bx hármas kielégíti a feltételeket, egyszínűek, és x_i osztója $ax + bx$–nek. 1 pont

b. Tegyük fel, hogy az $1, 2, \ldots 7$ számok ki vannak színezve pirossal és kékkel. Azt is feltehetjük, hogy 1 piros. Ha 2 és 3 is piros, akkor készen vagyunk. Tehát valamelyik kék. 1 pont

Ha a 2 kék, akkor tekintsük a $3, 5, 7$ számokat. Ha ezek közül kettő kék, akkor a 2–vel együtt egy megfelelő egyszínű számhármast adnak. Ha kettő közülük piros, akkor azok meg az 1–gyel együtt adnak megfelelő számhármast. 2 pont

Ha 1 és 2 is piros, akkor bármilyen további piros szám megfelelő számhármast ad az 1 és 2 számokkal. Egyébként meg a $3, 4, 5$ kékek, és akkor is készen vagyunk. 2 pont

3. G egy páros gráf A és B osztályokkal. $|A| = 10$, $|B| = 253$. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan u és v csúcs B–ben, hogy u minden szomszédja v–nek is szomszédja.

Ha van olyan u és v csúcs B–ben, amelyeknek pontosan ugyanazok az A–beli csúcsok a szomszédai, akkor u és v kielégíti a feltételeket. Tehát tegyük fel, hogy nincs két ilyen csúcs. 3 pont

Definiálunk egy $(A, \mathcal{F})$ halmazrendszert, amelynek az alaphalmaza A, és minden B–beli b pontnak megfelel A egy $N(b)$ részhalmaza, b szomszédai. 3 pont

$|\mathcal{F}| = 253 > \binom{10}{5} = 252$. Tehát Sperner tétele alapján valamilyen $u, v \in B$–re $N(u) \subset N(v)$. 4 pont

4. G egy 100 csúcsú és 2800 élű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz két diszjunkt háromszöget.

A 2 osztályú 100 csúcsú Turán gráfnak 2500 éle van. Turán tétele alapján tehát G ben van egy xyz háromszög. 3 pont

Hagyjuk el G–ből az x, y, és z csúcsokra illeszkedő éleket. Könnyen látható, hogy legfeljebb $3 \cdot 99 - 3 = 294$ élet hagytunk el. Tehát a maradék G' gráfnak legalább 2506 éle van. 4 pont

Így ismét a Turán tétel alapján G' is tartalmaz háromszöget. Ez a két háromszög diszjunkt, ezért készen vagyunk. 3 pont

5. G egy n csúcsú összefüggő síkgráf lerajzolva a síkra (metszés nélkül), $n \geq 3$ rögzített. $T_1, T_2, \ldots, T_m$ a tartományok, beleértve a nem korlátos tartományt is. Legyen $s(T_i) = |T_i| - 1$, és legyen $s(G) = \sum_{i=1}^m s(T_i)$. Mennyi $s(G)$ lehetséges legnagyobb értéke?

($|T_i|$ a T_i tartomány határán levő élek száma, ha egy él mindkét oldalról határolja, akkor kétszer számoljuk.)

Legyen e az élek, és t a tartományok száma. $s(G) = \sum_{i=1}^m s(T_i) = \sum_{i=1}^m |T_i| - \sum_{i=1}^m 1 = 2e - t$ hiszen $\sum_{i=1}^m |T_i|$ minden élet pontosan kétszer számol. 3 pont

Az Euler formula szerint $n - e + t = 2$ vagyis $e - t = n - 2$, tehát $2e - t = e + n - 2$. 4 pont

Ez nyilván akkor maximális, ha e maximális, hiszen n rögzített. Tanultuk, hogy e maximális értéke $3n - 6$, ezért $s(G)$ maximális értéke $4n - 8$. 3 pont

6. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ egy halmazrendszer azzal a tulajdonsággal, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$ és $A \subseteq B$, akkor $|A| = |B| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Legyen $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ azon $\mathcal{F}$–beli B halmazok családja, amelyekhez *van* olyan $A \in \mathcal{F}$ amelyre $A \subseteq B$, és legyen $\mathcal{F}_2$ a többi halmaz, vagyis azon $\mathcal{F}$–beli B halmazok családja, amelyekhez *nincs* olyan $A \in \mathcal{F}$ amelyre $A \subseteq B$. 3 pont

$\mathcal{F}_2$ a definíciója alapján Sperner rendszert alkot. 2 pont

Belátjuk, hogy $\mathcal{F}_1$ is Sperner rendszert alkot. Tegyük fel, hogy $A, B \in \mathcal{F}_1$, és $A \subseteq B$. A feltétel szerint $|A| = |B| - 1$. Viszont mivel $A \in \mathcal{F}_1$, van olyan $C \in \mathcal{F}$ amelyre $C \subseteq A$. Megint a feltétel szerint $|C| = |A| - 1$. De ekkor $C \subseteq B$ és $|C| = |B| - 2$, ami ellentmond a feltételnek. Tehát $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ is Sperner rendszer. 2 pont

Viszont ekkor a Sperner tétel alapján $|\mathcal{F}_1| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ és $|\mathcal{F}_2| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ tehát $|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. 3 pont