Kombinatorika és gráfelmélet II
1. pótZH, 2011. május 11. 12.15-13.45, H406
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G síkbarajzolt egyszerű gráfnak minden tartománya (beleértve a nem korlátost is) négyszög vagy háromszög, és ugyanannyi csúcsa van, mint a duálisának. Hány háromszög tartománya van?

Legyen t_3 a háromszög, t_4 a négyszög tartományok száma. Ekkor a feltétel szerint $t_3 + t_4 = t = n$. 2 pont
$3t_3 + 4t_4 = 2e$, hiszen így minden élet kétszer számoltunk. 3 pont
Az Euler formula szerint $n - e + t = 2$ tehát $n - e + n = 2$, vagyis $e = 2n - 2$. 2 pont
Behelyettesítve $3t_3 + 4t_4 = 4n - 4$, illetve $4t_3 + 4t_4 = 4n$, ezeket kivonva egymásból $t_3 = 4$. 3 pont

2. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ síkgráf, a $G_2(V, E_2)$ gráf egy Hamilton kör. Bizonyítsuk be, hogy $ch(G) \leq 8$. (Vagyis egy síkgráf és egy Hamilton kör uniójának lista színezési száma legfeljebb 8.)

Egy hajszálnyival erősebbet bizonyítunk, indukcióval: Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ síkgráf, a $G_2(V, E_2)$ gráf egy Hamilton kör *részgráfja*. Ekkor $ch(G) \leq 8$. 1 pont
Az állítás nyilvánvaló, ha legfeljebb 8 csúcsunk van. 1 pont
Tegyük fel, hogy már beláttuk az állítást $n - 1$ csúcsú gráfokra. Tekintsünk egy n csúcsú gráfot, amely kielégíti a feltételeket, és vegyünk minden csúcshoz egy-egy 8 hosszú színlistát. 1 pont
G síkgráf részének ($G_1(V, E_1)$) legfeljebb $3n - 6$ éle van. 1 pont
A Hamilton kör részgráf részének ($G_2(V, E_2)$) meg legfeljebb n. 1 pont
Tehát összesen legfeljebb $4n - 6$, emiatt van egy v csúcsa, amelynek a foka legfeljebb 7. 1 pont
Hagyjuk el v–t, a maradék gráf is kielégíti a felételeket, tehát az indukciós feltevés szerint ki tudjuk színezni az adott listákról. 2 pont
Most tegyük vissza v–t, legfeljebb 7 szomszédja van, tehat a 8 hosszú listáján találunk olyan színt ami a szomszédai színétől különbözik, ezzel a színnel színezve v–t, G megfelelő színezését kapjuk. 2 pont

3. Tetszőleges G síkgráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Mennyi a $2n(G) + 3e(G) + 4t(G)$ érték maximuma, ha $n = n(G)$ rögzített?

Ha $n = 1$, akkor nyilván 6 a válasz, ha $n = 2$, akkor 11. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$. 1 pont
Látható, hogy egy új él behúzásával a $2n(G) + 3e(G) + 4t(G)$ mennyiség nő: $2n(G)$ nem változik, $3e(G)$ nő, és $4t(G)$ nem csökken. 4 pont
Tanultuk, hogy minden síkbarajzolt gráf új élek behúzásával háromszögelléssé tehető. Ezért $2n(G) + 3e(G) + 4t(G)$ a maximumát akkor veszi fel, amikor G háromszögelés. 2 pont
Ekkor az Euler formula alapján $n - e + t = 2$, $2e = 3t$, ebből $e(G) = 3n - 6$, $t(G) = 2n - 4$, behelyettesítve $2n(G) + 3e(G) + 4t(G) = 19n - 34$. 3 pont

4. Tetszőleges G gráfra legyen G' a következő gráf. Vesszük G–nek és G komplementerének egy-egy diszjunkt példányát, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a két példányban összekötjük.

(a) Milyen n–re lesz a K_n' gráf perfekt? (K_n a teljes n csúcsú gráf.)
(b) Milyen n–re lesz a C_n' gráf perfekt? (C_n az n csúcsú kör.)

(a) Minden n–re perfekt lesz. Tekintsük egy H feszített részgráfját. Bebizonyítjuk, hogy $\chi(H) = \omega(H)$. 1 pont
H egy k csúcsú teljes gráf, néhány csúcsáról lelóg egy él, és ezenkívül lehet még néhány izolált pont. 2 pont
Ennek a gráfnak $k \geq 2$ esetén a klikkszáma k, és ennyi színnel könnyedén ki lehet színezni. Ha $k = 1$, akkor legfeljebb egy éle van H–nak, ha $k = 0$, akkor pedig egyáltalán nincs éle. Tehát ezekben az esetekben is $\chi(H) = \omega(H)$. 2 pont
(b) Ha $n = 1$, 2, vagy 3, akkor $C_n' = K_n'$, tehát perfekt. 1 pont
Ha $n > 3$, akkor legyen v_1, v_2, v_3 három szomszédos csúcs C_n–en, és legyenek a megfelelő csúcsok u_1, u_2, u_3 C_n komplementerében. Ekkor C_n'–ben v_1, v_2, v_3, u_3, u_1 éppen egy 5 hosszú kört feszítenek, tehát $n > 3$ esetén C_n' nem perfekt. 4 pont

5. Legyen G egy síkgráf, lerajzolva a síkra, duálisa egyszerű gráf. Legyen H a következő gráf. H csúcsai G csúcsainak, illetve G tartományainak felelnek meg. H két csúcsa, u és v össze van kötve éllel akkor és csak akkor, ha

a. u és v is G *csúcsának* felel meg, és a megfelelő csúcsok össze vannak kötve G–ben.

b. u G *csúcsának* felel meg, v G *tartományának*, és a megfelelő csúcs a megfelelő tartomány határán van.

c. u és v is G *tartományának* felel meg, és a megfelelő tartományok egy él mentén határosak.

Bizonyítsuk be, hogy $\chi(H) \leq 8$. ($\chi(H)$ a H kromatikus száma.)

H–nak azok a csúcsai, amelyek G csúcsának felelnek meg, éppen egy G–vel izomorf részgráfot feszítenek. A négyszíntétel miatt ezt a részgráfot kiszínezhetjük négy színnel. 4 pont
H–nak azok a csúcsai, amelyek G tartományainak felelnek meg, G duálisával izomorf részgráfot feszítenek. Ez is egy síkgráf, ezt ismét a négyszíntétel miatt kiszínezhetjük további négy színnel. 5 pont
Ez H–nak egy jó színezése lesz, tehát $\chi(H) \leq 8$. 1 pont

6. Adott 100 körív egy körön. Bizonyítsuk be, hogy vagy van olyan pont a körön, amit legalább 10 körív tartalmaz, vagy pedig van 10 páronként diszjunkt körív.

(Sokkal kellemesebb lenne, ha nem körívek, hanem egy egyenesen intervallumok lennének, mert akkor alkalmazhatnánk a Dilworth tételt, illetve az intervallum gráfok perfektségét.)

Legyen p a körnek egy pontja. Ha p–t legalább 10 körív tartalmazza, akkor készen vagyunk. Tehát tegyük fel, hogy p–t legfeljebb 9 körív tartalmazza. Hagyjuk el ezeket a köríveket. 4 pont
A többi, legalább 91 körív nem tartalmazza p–t, ezért az M 91 csúcsú metszés–gráfjuk pontosan egy intervallum-gráf, ami perfekt. Tehát $\omega(M)\alpha(M) \geq 91$, ezért vagy van 10 páronként diszjunkt körív, vagy 10 páronként metsző. 4 pont
Az első esetben készen vagyunk, a második esetben, felhasználva hogy ezen körívek nem tartalmazzák a p pontot, a 10 körívnek van közös pontja. 2 pont

Másik befejezés:

Tekintsük ezt a 91 intervallumot, és definiáljunk egy részbenrendezést a körívek között. Legyen I_1 és I_2 két körív, $I_1 \prec I_2$ akkor és csak akkor, ha I_1 és I_2 diszjunktak, és órajáras szerint a körön I_1 után van I_2, és utána p. 4 pont
Ekkor a Dilworth tétel szerint vagy van egy 10 hosszú lánc, vagy egy 10 hosszú antilánc. Az első eset 10 páronként diszjunkt körívet jelent, a második eset 10 páronként metszőt. 2 pont