

Kombinatorika és gráfelmélet II
2. ZH, 2011. április 27. 12.15-13.45, E1C
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenként az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettéktől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. a. Bizonyítsuk be, hogy $R(3, 3, 3, 3) \leq R(6, 6)$.

b. Bizonyítsuk be, hogy $R(k, k, k, k) \leq 4^{4^k}$.

($R(k_1, k_2, \dots, k_m)$ a legkisebb R szám azzal a tulajdonsággal, hogy egy teljes R csúcsú gráf éleit akárhogy színezzük az $1, 2, \dots, m$ színekkel, valamilyen i -re lesz egy k_i csúcsú teljes részgráf, amelynek az összes éle i színű.)

a. Azt kell belátni, hogy egy $R(6, 6)$ csúcsú gráf éleit 4 színnel színezve mindig található egyszínű háromszög. 1 pont
Tekintsünk egy ilyen színezést az $1, 2, 3$, és 4 színekkel. Helyettesítsük az 1 és a 2 színeket az 12 színnel, a 3 és 4 színeket a 34 színnel. 1 pont

$R(6, 6)$ definíciójából következik, hogy van 6 csúcs, v_1, v_2, \dots, v_6 , amelyek között az összes él ugyanolyan színű. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez az 12 szín. 1 pont

Ekkor az eredeti színezésben a v_1, v_2, \dots, v_6 közötti élek 1 vagy 2 színűek. 1 pont

Mivel $R(3, 3) = 6$ (volt órán, és könnyen látható) ezért v_1, v_2, \dots, v_6 között van három amelyek között az összes él ugyanolyan színű. 1 pont

b. Hasonlóan mint az a. részben, belátható, hogy tetszőleges $k \geq 2$ esetén $R(k, k, k, k) \leq R(R(k, k), R(k, k))$. 2 pont

Azt is tudjuk, (Erdős-Szekeres tétel) hogy $R(m, m) \leq \binom{2m-2}{m-1} < 4^m$. 1 pont

Ennek alapján $R(k, k, k, k) \leq R(R(k, k), R(k, k)) < R(4^k, 4^k) < 4^{4^k}$. 2 pont

2. Bizonyítsuk be, hogy $R(4, 4, 4, 4)$ különböző pont a síkon legalább 5 különböző távolságot határoz meg.

Tegyük fel, hogy adott $R(4, 4, 4, 4)$ különböző pont a síkon, amelyek csak négy különböző távolságot határoznak meg. Színezzük ki a pontok közötti éleket négy színnel, aszerint, hogy a megfelelő élnek mennyi a hossza. 4 pont

$R(4, 4, 4, 4)$ definíciója alapján lesz négy pont, amelyek között az összes él ugyanolyan színű. 3 pont

Csak hogy a síkon ez lehetetlen, nincs olyan négy pont, hogy bármely kettő távolsága ugyanannyi. 3 pont

3. G egy páros gráf A és B osztályokkal. Bármely két A -beli pontnak, illetve bármely két B -beli pontnak pontosan 2 közös szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy $|A| = |B|$.

1. megoldás: Legyen X a gráfban található C_4 -ek (4 hosszú körök) száma. A feltétel szerint bármely két A -beli pontnak pontosan két közös szomszédja van, így bármely két A -beli ponthoz pontosan egy C_4 -et találhatunk, amin ők rajta vannak. Így minden C_4 -et pontosan egyszer számoltunk, hiszen minden C_4 -en pontosan két A -beli és két B -beli pont van. 5 pont

Tehát $X = \binom{|A|}{2}$ 1 pont

Ugyanígy okoskodhatunk A és B szerepét felcserélve, tehát $X = \binom{|B|}{2}$ 3 pont

Ebből következik hogy $X = \binom{|A|}{2} = \binom{|B|}{2}$, vagyis $|A| = |B|$. 1 pont

2. megoldás: Tegyük fel, hogy van két olyan A -beli pont, amelyeknek pontosan ugyanazok a szomszédjai B -ben. Ekkor pontosan két közös szomszédja van a feltétel alapján. 1 pont

Ha van egy harmadik pont is A -ban, akkor az a két B -beli pont annak is szomszédja, de ekkor a két B -beli pontnak már három közös szomszédja lenne. Hasonlóan nem lehet B -ben sem további pont. Ugyanígy érvelhetünk, ha van két olyan B -beli pont, amelyeknek pontosan ugyanazok a szomszédjai A -ban. Tehát ezekben az esetekben $|A| = |B| = 2$.

2 pont

Mostantól tehát feltehetjük, hogy semelyik két pontnak sem pontosan ugyanazok a szomszédai. Definiáljunk egy \mathcal{A} hipergráfot, amelynek az alaphalmaza A , és minden B -beli b pontra b szomszédai alkossanak egy hiperéleket. Ennek a hipergráfnak $|A|$ pontja van és $|B|$ éle, és bármely két él (részhalmaz) metszete pontosan két elemű. 3 pont

A Fisher egyenlőtlenség alapján ekkor $|B| \leq |A|$. 1 pont

Most cseréljük meg A és B szerepét, definiáljuk a \mathcal{B} hipergráfot, erre alkalmazva a Fisher egyenlőtlenséget azt kapjuk hogy $|A| \leq |B|$. 2 pont

Tehát $|A| = |B|$. 1 pont

4. G egy 100 csúcsú és 4501 élű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G -nek minden 11 csúcsú gráf részgráfja.

Elég belátni hogy G tartalmaz egy 11 csúcsú teljes gráfot, mert ennek minden 11 csúcsú gráf részgráfja. 3 pont

A Turán tétel alapján a 100 csúcsú, 11 csúcsú teljes gráfot nem tartalmazó gráfok közül a $T_{100,10}$ Turán gráfnak van a legtöbb éle. 3 pont

Ennek éppen $100 \binom{10}{2} = 4500$ éle van, tehát egy 4501 élű gráf már biztosan tartalmaz egy 11 csúcsú teljes gráfot. 4 pont

5. G egy n csúcsú összefüggő síkgráf lerajzolva a síkra (metszés nélkül), $n \geq 3$ rögzített. T_1, T_2, \dots, T_m a tartományok, beleértve a nem korlátos tartományt is. Legyen $s(T_i) = |T_i| - 2$, és legyen $s(G) = \sum_{i=1}^m s(T_i)$. Mennyi $s(G)$ lehetséges legnagyobb értéke?

($|T_i|$ a T_i tartomány határán levő élek száma, ha egy él mindkét oldalról határolja, akkor kétszer számoljuk.)

Legyen e az élek száma. $\sum_{i=1}^m s(T_i) = \sum_{i=1}^m |T_i| - \sum_{i=1}^m 2 = 2e - 2m$, mert a $\sum_{i=1}^m |T_i|$ tagban minden élet pontosan kétszer számoltunk. 4 pont

Az Euler formula alapján $n - e + m = 2$ 3 pont

Tehát $s(G) = 2e - 2m = 2n - 4$, minden n csúcsú összefüggő síkgráfra, ez persze egyben a lehetséges legnagyobb érték is. 3 pont

6. Kiránduló Károly 100 különböző tárgyat szeretne vinni kirándulni, de sajnos nem mind fér be a hátizsákjába. Ezért annyi holmit csomagol, amennyit csak tud (nem tud semmi további tárgyat betenni a hátizsákba). Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb $\binom{100}{50}$ különböző csomagot állíthat össze. (Két csomag különböző, ha nem pontosan ugyanazok a tárgyak vannak benne.)

Adjunk olyan tárgy és hátizsák méreteket, amikor tényleg összeállítható ennyi féle csomag.

Definiáljunk egy hipergráfot, amelynek az alaphalmaza 100 elemű, megfelelnek a 100 tárgynak, a hiperélek pedig a tárgyak részhalmazai, amelyek megfelelnek a lehetséges csomagoknak. 2 pont

Ha A és B két hiperél, akkor A nem lehet részhalmaza B -nek, hiszen ebben az esetben az A -hoz tartozó tárgyakhoz további tárgyakat lehetne csomagolni. 3 pont

Vagyis a hipergráfunkban semelyik hiperél sem tartalmazza a másikat. Ekkor a Sperner tétel alapján legfeljebb $\binom{100}{50}$ hiperélünk lehet. 3 pont

Ennyi tényleg lehet: legyenek a tárgyak egyformák, a zsák pedig akkora, hogy pontosan 50 tárgy fér bele. Ekkor minden 50 méretű részhalmaz megfelel egy lehetséges csomagnak. 2 pont