Kombinatorika és gráfelmélet II
1. ZH, 2011. március 19. 10.15-11.45, K232
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Egy összefüggő síkgráfnak 700 csúcsa és 1000 éle van. Bizonyítsuk be, hogy a duálisa nem egyszerű gráf.

Legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_{700}$ a csúcsok fokszámai. $d_1 + d_2 + \cdots + d_{700} = 2e = 2000$ — 1 pont
Ha minden $d_i \geq 3$, akkor $d_1 + d_2 + \cdots + d_{700} \geq 3 \cdot 700 = 2100$, ami tehát lehetetlen. — 3 pont
Ezért van olyan csúcs, aminek a fokszáma kevesebb mint 3. — 1 pont
Mivel a gráf összefüggő, 0 fokú pont nincs, tehát valamelyik csúcs foka 1 vagy 2. — 2 pont
Egy 1 fokú pont a duálisban egy hurokélnek felel meg, egy 2 fokú pedig egy kétszeres élnek. — 2 pont
Tehát a duális nem lehet egyszerű gráf. — 1 pont

2. G síkgráf, csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $n \geq 11$. Minden v_i csúcsához tartozik egy $L(v_i)$ színlista. Minden $i > 11$–re $|L(v_i)| = 6$, és $1 \leq i \leq 11$–re $|L(v_i)| = 5$. Bizonyítsuk be, hogy G L-színezhető.

A következő (hajszálnyival erősebb) állítást bizonyítjuk, a csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval. Ha $k \leq 11$ csúcs listája 5 hosszú, a többié 6 hosszú, akkor a gráf kiszínezhető az adott listákról. — 1 pont

Ez legfeljebb 5 csúcsú gráfokra triviálisan igaz. — 1 pont

Tegyük fel, hogy n–nél kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. Tekintsünk egy n csúcsú gráfot a feltételeket kielégítő listákkal. — 1 pont

Ha van egy v legfeljebb 4 fokú csúcs, akkor hagyjuk el, a maradék gráf az indukciós feltevés alapján kiszínezhető az adott listákról. Tegyük vissza a v csúcsot, legalább 5 hosszú a listája, és legfeljebb 4 tiltott szín van a szomszédai miatt, így őt is ki tudjuk színezni. — 2 pont

Ha pedig minden fokszám legalább 5, akkor legalább 12 darab 5 fokú csúcs van, mert a fokszámok összege legfeljebb $6n - 12$. — 2 pont

Ezért választhatunk egy olyan v 5 fokú csúcsot, amelynek 6 hosszú a listája. Ezt elhagyva a maradék gráf az indukcíós feltevés alapján kiszínezhető az adott listákról. Tegyük vissza a v csúcsot, ennek 6 hosszú a listája, és legfeljebb 5 tiltott szín van a szomszédai miatt, így őt is ki tudjuk színezni. — 3 pont

3. A G összefüggő 2011 csúcsú síkgráf részgráfja a duálisának. Hány éle van?

Tegyük fel, hogy G–nek n csúcsa, e éle és t tartománya van. — 1 pont
Egy gráfnak és a duálisának ugyanannyi éle van. — 1 pont
G–nek nincs izolált pontja, mert összefüggő. — 1 pont
Ezért G és a duálisa izomorfak, így a duálisnak is n csúcsa van. — 3 pont
G minden tartománya megfelel a duális egy csúcsának, ezért $n = t$. — 2 pont
Ekkor viszont az Euler formula alapján $n - e + n = 2$, $e = 2n - 2$. — 1 pont
Behelyettesítve $e = 4020$. — 1 pont

4. Tetszőleges G gráfra legyen $2G$ a következő gráf. Vesszük G két diszjunkt példányát, és az egymásnak megfelelő csúcsokat a két példányban összekötjük.
(a) Milyen n–re lesz a $2K_n$ gráf perfekt? (K_n a teljes n csúcsú gráf.)
(b) Milyen n–re lesz a $2C_n$ gráf perfekt? (C_n az n csúcsú kör.)

(a) $2K_n$ komplementere egy $K_{n,n}$ teljes páros gráf, minusz egy teljes párosítás a két osztály között. 1 pont

Ez egy páros gráf, tehát perfekt. 2 pont

A gyenge perfekt gráf tétel miatt, ennek a komplementere, $2K_n$ is perfekt. 2 pont

(b) $2C_n$ tartalmazza C_n–et mint feszített részgráf. 1 pont

Tehát ha $n \geq 5$ és páratlan, akkor $2C_n$ nem perfekt. 1 pont

Ha n páros, akkor viszont $2C_n$ páros gráf: egyik osztály az egyik C_n páros indexű pontjai, és a másik páratlan indexű pontjai. A másik osztály a többi pont. Ezért $2C_n$ perfekt. 1 pont

Ha $n = 3$, akkor pedig könnyen ellenőrizhető hogy $2C_n$ nem tartalmaz feszített 5 hosszú kört. (sem a komplementerét, ami ugyancsak feszített 5 hosszú kör.) Akárhogy hagyunk el egy pontot a hat közül, ugyanazt a feszített részgráfot kapjuk, de ez nem 5 hosszú kör. 1 pont

Tehát ha $n \geq 5$ és páratlan, akkor $2C_n$ nem perfekt, különben igen. 1 pont

5. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, és a $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ gráfok síkgráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 12$. (Vagyis két síkgráf uniója kiszínezhető 12 színnel.) Mutassunk olyan gráfot, ami két síkgráf uniója, és a kromatikus száma legalább 6.

A csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. Ha $n \leq 12$ akkor az álllítás triviális. Tegyük fel, hogy n-nél kevesebb csúcsú gráfokra már beláttunk az állítást. 1 pont

Egy n csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle van, tehát két síkgráf uniójának legfeljebb $6n - 12$. 1 pont

Ha minden d_i fokszám legalább 12 lenne akkor $2e = d_1 + d_2 + \cdots + d_n \geq 12n$, ami lehetetlen. Tehát van egy legfeljebb 11 fokú v csúcs. 3 pont

Ezt a csúcsot elhagyva, az indukciós feltevés szerint a maradék gráf kiszínezhető 12 színnel. 1 pont

Tegyük vissza a v csúcsot, mivel ennek legfelebb 11 a fokszáma, legfeljebb 11 tiltott szín van, ezért ezt is ki tudjuk színezni a 12 szín valamelyikével. 1 pont

A 6 csúcsú teljes gráf könnyen megkapható mint két síkgráf uniója, és természetesen 6 a kromatikus száma. 3 pont

6. Adott 100 darab gráf, $G_1, G_2, \ldots, G_{100}$. Bizonyítsuk be, hogy vagy van köztük 10 olyan, amelyek közül egyik sem részgráfja a másiknak, vagy van köztük 10 olyan, hogy bármely kettőből valamelyik részgráfja a másiknak.

Először egy hiányos megoldás: Tegyük fel, hogy a $G_1, G_2, \ldots, G_{100}$ gráfok különbözőek.

Vezessünk be egy relációt a gráfok között. $G_i \prec G_j$ ha G_i részgráfja G_j–nek. 2 pont

Ez nyilvan reflexív, hiszen minden gráf részgráfja önmagának. 1 pont

Antiszimmetrikus, mert ha G_i részgráfja G_j–nek, és G_j részgráfja G_i–nek, akkor $i = j$. (itt használjuk, hogy különbözőek a gráfok) 1 pont

És tranzitív, mert ha G_i részgráfja G_j–nek, és G_k részgráfja G_i–nek, akkor G_k részgráfja G_j–nek. 1 pont

Tehát a Dilworth tétel, vagy a duális Dilworth tétel, vagy az összehasonlítás gráfok perfektsége miatt, ha a leghosszabb lánc méterete l, a legnagyobb antilánc méterete a, akkor $al \geq 100$, tehát valamelyikük legalább 10. 4 pont

A teljes megoldás, amikor lehetnek egyformák is a gráfok között:

Vezessünk be egy relációt a gráfok között. $G_i \prec G_j$ ha $G_i = G_j$ és $i < j$, vagy $G_i \neq G_j$ G_i részgráfja G_j–nek. 3 pont

Ez nyilvan reflexív, hiszen minden gráf részgráfja önmagának. 1 pont

Antiszimmetrikus, mert ha $G_i \prec G_j$ és $G_j \prec G_i$, akkor $i = j$. 1 pont

És tranzitív, mert ha $G_i \prec G_j$ és $G_k \prec G_i$, akkor $G_k \prec G_j$. 1 pont

Tehát a Dilworth tétel, vagy a duális Dilworth tétel, vagy az összehasonlítás gráfok perfektsége miatt, ha a leghosszabb lánc méterete l, a legnagyobb antilánc méterete a, akkor $al \geq 100$, tehát valamelyikük legalább 10. 4 pont