Kombinatorika és gráfelmélet II
2. aláíráspótló ZH, 2011. május 19. 8.15-9.45, QBF9

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A feladatok sorrendje nem feltétlenül tükrözi azok nehézségét. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. Legyen $R_{\text{út}}(k,l)$ a legkisebb R szám azzal a tulajdonsággal, hogy egy teljes R csúcsú gráf éleit akárhogy színezzük pirossal és kékkel, vagy találhatunk egy k hosszú (k élű) utat, amelynek minden éle piros, vagy egy l hosszú (l élű) utat, amelynek minden éle kék. Bizonyítsuk be, hogy $R_{\text{út}}(k,l) \leq \max\left(l + R_{\text{út}}(k-1,l), k + R_{\text{út}}(k,l-1)\right)$.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 1$ egészhez létezik olyan $R(k)$ szám, hogy ha az $1,2,\ldots,R(k)$ számokat kiszínezzük k színnel, akkor található három egyszínű szám, x,y,z amelyekre $x+y>z$, $x+z>y$ és $y+z>x$.

3. $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$, $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszer, bármely két $\mathcal{F}$–beli A, B halmaznak pontosan két olyan közös eleme van, amely különbözik az 1 elemtől. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathcal{F}| \leq 2(n-1)$.

4. G egy 100 csúcsú és 3750 élű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz egy öt hosszú kört, és három háromszöget, amelyek egymástól mind diszjunktak.

5. Egy G összefüggő síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$, $e(G)$, és $t(G)$ a G csúcsainak, éleinek, illetve tartományainak száma. Mennyi a $2n(G)+t(G)$ mennyiség legkisebb értéke, ha $e(G)=18$ rögzített?

6. $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ halmazrendszer, bármely két $\mathcal{F}$–beli A, B halmazra ha $A \subseteq B$, akkor $|B|-|A|$ egy páratlan szám. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathcal{F}| \leq 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$