

Kombinatorika és gráfelmélet II
1. aláíráspótló ZH, 2011. május 19. 8.15-9.45, QBF9

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A feladatok sorrendje nem feltétlenül tükrözi azok nehézségét. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószereken és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. Legyen G egy síkbarajzolt egyszerű összefüggő gráf, \bar{G} a duálisa. Tegyük fel, hogy \bar{G} is egyszerű gráf. Legyen a H gráf G és \bar{G} diszjunkt uniója, síkbarajzolva. Tudjuk, hogy H -nak 2011 tartománya van. Hány éle van G -nek?

2. G egy síkbarajzolt gráf, minden éle egy vízszintes vagy függőleges szakasz.

a. Bizonyítsuk be, hogy $ch(G) \leq 4$.

b. Bizonyítsuk be, hogy $ch(G) \leq 3$.

c. Bizonyítsuk be, hogy $ch(G) \leq 2$ nem feltétlenül igaz. (Vagyis adjunk a feltételeknek megfelelő G gráfot, amelyre $ch(G) = 3$.)

($ch(G)$ a G gráf lista színezési száma.)

3. A G összefüggő gráf *nem* síkgráf, de bármely élét elhagyva síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $e(G) \geq n(G) + 3$.

($n(G)$ és $e(G)$ a G gráf csúcsainak, illetve éleinek a száma.)

4. Legyen G egy páros gráf, A és B osztályokkal. Kössünk össze bármely két A -beli csúcsot, a kapott gráf legyen G' . Milyen G gráfra lesz G' perfekt?

5. Adott n pont a síkon, mind az $\binom{n}{2}$ fellépő távolság különböző. Minden pontot kössünk össze a hozzá legközelebbi ponttal, így kapjuk a G gráfot. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = 2$.

6. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, és a $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ gráfok perfektek, $|V| = 82$. (Vagyis G egy 82 csúcsú gráf, amely két perfekt gráf uniója.)

Bizonyítsuk be, hogy G vagy a komplementere tartalmaz egy teljes 4 csúcsú gráfot.