

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

9. gyakorlat, 2011. április 13.

Turán-tétel, hipergráfok

1. Legfeljebb hány éle lehet egy n pontú gráfnak, ha nincsen benne
 - kör?
 - páratlan kör? (páros lehet)
 - páros kör? (páratlan lehet)
 - 2 élből álló út?
 - sem 3 élből álló út, sem kör?
 - feszítőfa?
2. Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük tíz embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.
3. Igazoljuk, hogy az n -csúcsú, m -osztályú $T_{n,m}$ Turán-gráf pontosan akkor nem tartalmaz Hamilton-kört, ha $m = 2$ és n páratlan.
4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű, összefüggő gráfban nincs háromszög, akkor $|E(G)| \leq \alpha(G)\tau(G)$. Mikor áll egyenlőség?
5. Legyenek v_1, v_2, \dots, v_n síkbeli vektorok, $|v_i| \geq 1$. Legalább hány párra lesz $|v_i + v_j| \geq 1$?
6. Legkevesebb hány csúcsa lehet egy háromszögmentes, egyszerű G gráfnak, ha $|E(G)| \geq 2|E(K_k)|$?
7. Adott a síkon n , nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható egységnyi távolságra levő pontpárok száma?
8. Mutassuk meg, hogy sík n különböző pontja legfeljebb $c \cdot n^{\frac{3}{2}}$ egységtávolságot határozhat meg, ahol c alkalmas konstans.
9. Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú gráfnak, ha élei kiszínezhetők úgy két színnel, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög.
10. Egy n tagú társaságban eredetileg senki nem ismer senkit. Minimálisan hány bemutatással (egy bemutatás mindig pontosan két ember egymásnak való bemutatását jelenti) érhetjük el, hogy teljesüljenek a következő feltételek: 1. Bármely három ember között van kettő, akik ismerik egymást (tehát be lettek mutatva); 2. Bárki bárkinek (olyannak is, akit nem ismer) küldhet üzenetet úgy, hogy az üzenetet egymást ismerő (tehát egymásnak bemutatott) emberek adják tovább egymásnak, s az végül célba jut.
11. Egy 49 csúcsú gráfnak 1030 éle van. Mutassuk meg, hogy ekkor a kromatikus száma legalább 8, és hogy pontosan 8 is lehet.
12. Legyen adott a térben 40 tetszőleges pont. Bizonyítsd be, hogy ezek közül kiválasztható éppen egységnyi távolságra levő pontpárok száma legfeljebb 600.

13. Legyen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, ahol minden $p_i > 1$ és p_i prímszám. Hány osztóját választhatjuk ki n -nek úgy, hogy semelyik két kiválasztott osztó se legyen relatív prím?
14. Artúr király n lovagját felderítő utakra küldi. Minden nap k lovag megy portyázni. Ugyanaz a csapat nem mehet kétszer és – hogy az információkat mindig mindenki megtudja – nem lehet két csapat, aminek nincs közös tagja. Hány napig lehet így csapatokat összeállítani?
15. Adott síkon m egyenes. Tegyük fel, hogy az egyenesek nem illeszkednek ugyanarra a pontra, és hogy az egyenesek közül semelyik kettő sem párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy ezen egyenesek legalább m metszéspontot határoznak meg!
16. Növényvédő szerekkel való kísérletezéshez a következőkre van szükség. Legyen m féle növény és n különböző földterület. Minden területen pont k féle növényt ültetünk, minden növényt pont r területre ültetünk, és minden nyövénypárra pont l olyan terület van, ahol mindenkettő szerepel. Lássuk be, hogy $n \geq m$.
17. Van néhány k elemű halmazunk, bármely kettő pontosan l pontban metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik elemet legfeljebb csak k halmaz tartalmazza.

Házi feladat

1. Egy 30 fős társaságban mindenki legalább 20 embert ismer a többiek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Tudjuk, hogy bárhogyan választunk ki a társaság tagjai közül 4 embert, közülök kiválasztható kettő olyan, akik nem ismerik egymást. A társaság három tagja Bakács úr, Szakács úr és Takács úr. Bakács úr nem ismeri sem Szakács urat, sem Takács urat. Ismeri-e egymást Szakács úr és Takács úr?
2. Egy 100 elemű halmaznak 20 és 80 elemű részhalmazait választjuk ki úgy, hogy bármely kettő metszi egymást. Legfeljebb hány részhalmaz lehet így kiválasztani?