Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2011. március 30.

Ramsey elmélet

1. Mutassuk meg, hogy minden legalább 10 csúcsú G gráfra $\omega(G) \geq 4$ vagy $\alpha(G) \geq 3$.
2. Bizonyítsuk be, hogy $R(3,3,3) \leq 17$ és azt is, hogy $R(3,4) = 9$.
3. Igazoljuk, hogy $c \geq 3$ esetén $R_t(n_1, n_2, \ldots, n_c) \leq R_t(n_1, n_2, \ldots, n_{c-2}, R_t(n_{c-1}, n_c))$ teljesül. ($R = R_t(n_1, n_2, \ldots, n_c)$ az a legkisebb R szám, amelyre igaz, hogy az R csúcsú teljes t–uniform hipergráf éleit az $1, 2, \ldots, c$ színekkel színezve valamilyen i–hez található olyan n_i darab csúcs, amelyeken az összes él (csúcs–t-es) i–színű.)
4. Mutassuk meg, hogy ha G n csúcsú, egyszerű gráf, akkor $\max(\alpha(G), \omega(G)) \geq 1 + \log_4 n$.
5. A sík pontjait kiszínezte valaki pirosra, fehérre és zöldre. Igazoljuk, hogy mindenképpen keletkezett egyszínű, egymástól egységnyi távolságban levő pontpár!
6. Igazoljuk, hogy a ki lehet színezni a sík pontjait 9 színnel úgy, hogy ne legyen egyszínű, egymástól egységnyi távolságban levő pontpár! Igazoljuk az állítást 7 színnel.
7. Legyen a_n a természetes számok tetszőleges szigorúan növő végtelen sorozata. Mutassuk meg, hogy talalható akármilyen hosszú részsorozat, amelyben bármely két elem relatív prím, vagy semelyik két elem sem relatív prím.
8. Kiszínezhetők-e az egész számok két színnel úgy, hogy ne létezzen egyszínű végtelen számtani sorozat? Hát mértani?
9. Mutassunk olyan $(k-1)^2$ pontú gráfot, amelyben nincs sem teljes k-as sem üres k-as!
10. Tegyük fel, hogy a sík pontjait kiszínezte valaki pirosra és zöldre úgy, hogy mindkét színt használta. Mutassuk meg, hogy mindenképpen keletkezett egymástól egységnyi távolságban levő pontpár, melynek egyik tagja piros, a másik zöld! Igaz-e, hogy a sík ilyen kiszínezésekor biztosan található olyan egységoldalú szabályos háromszög, aminek csúcsai egyszínűek?
11. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy a Van der Waerden tétel igaz 2 szín felhasználásával, mutassuk meg ebből, hogy igaz 3 színnel is, sőt több színnel is.
12. Mutassuk meg, hogy minden k pozitív egészhez létezik olyan $N(k)$ küszöb, hogy ha $n > N(k)$ és az $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz részhalmazait k színnel színezzük, akkor léteznek az $[n]$ halmaznak olyan diszjunkt X_1 és X_2 részhalmazai, hogy X_1, X_2 és $X_1 \cup X_2$ színe megegyezik.

Házi feladat

1. A Facebook Kombi2 fan klub $s(s+1)/2$ tagjára az teljesül, hogy bármely hármat kiválasztva, van ezek között legalább kettő, akik ismerik egymást. Mutassuk meg, hogy biztosan van s olyan Kombi2 fan tag, akik egymást mindannyian ismerik!
2. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget: $R_3(k,l) \leq R_2(R_3(k-1,l), R_3(k,l-1)) - 1$.