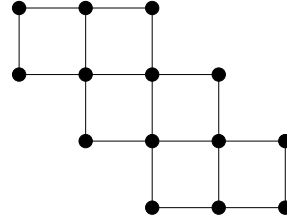
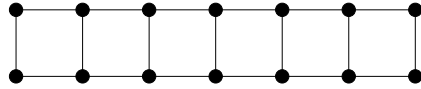


## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

5. gyakorlat, 2011. március 9.

*Dualitás, összehasonlítás gráfok, síkgráfok színezése*

1. Bizonyítsuk be, hogy egy síkbarajzolható gráf tartományai akkor és csak akkor színezhetők ki két színnel, ha minden pont foka páros.
2. Gyengén izomorfak-e az itt látható gráfok?



3. Bizonyítsuk be, két fa pontosan akkor gyengén izomorf, ha ugyanannyi pontjuk van.
4. Tetszőleges összefüggő síkbarajzolható  $G$  gráfhoz mutassunk olyan, önmagával duális  $G'$  síkbarajzolt gráfot, aminek  $G$  feszített részgráfja.
5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges egyszerű, síkgráf élhalmaza előáll, mint 2 páros gráf élhalmazának uniója.
6. A  $G$  és a  $G^*$  véges egyszerű gráfok egymás duálisai. Bizonyítsuk be, hogy  $\min\{\delta(G), \delta(G^*)\} = 3$ .  $\delta$  a legkisebb fokszám.
7. Legyen  $G$  olyan  $n \geq 3$  csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, melyben az élek száma  $3n - 6$ . Mennyi  $G$  duálisának maximális fokszáma?
8. Jelölje  $F_n = K_{n,n} - nK_2$  azt a páros gráfot, melyet úgy kapunk a  $K_{n,n}$  teljes páros gráfból, hogy elhagyjuk belőle egy teljes párosítás éleit. Milyen  $n$ -ek esetén lesz  $F_n$  síkbarajzolható?
9. Van egy csomó kartondobozunk, melyek a  $G$  gráf csúcsainak felelnek meg. Két csúcs akkor van összekötve, ha a megfelelő dobozok közül egyik sem rakható a másikba. Igazoljuk, hogy  $G$  perfekt.
10. Adott a síkon néhány körvonal, ezekhez rendeljük a következő  $G$  gráfot.  $G$  csúcsai feleljenek meg egy-egy megadott körvonalnak, és kettő akkor legyen összekötve, ha a két megfelelő körvonal egyike teljesen a másik belsejében halad. Bizonyítsuk be, hogy az így megadott  $G$  gráf perfekt.

### Házi feladat.

1. Tegyük fel, hogy  $G$  síkbarajzolt gráf,  $G$  minden lapja háromszög és  $G^*$  minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van  $G$ -nek?