

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

3. gyakorlat, 2011. február 23.

Síkgráfok

1. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzolttság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.
2. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?
3. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolt gráfnak, amit három háromszög-, három négyszög- és egy ötszöglap határol?
4. Ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
 - a) egyúttal tóruszra is rajzolható;
 - b) ha G -nek $3n-6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - c) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
 - d) G -nek van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
5. Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g , akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g+2}(n+2)$.
6. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
7. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és \bar{G} egyike biztosan nem síkgráf.
8. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
9. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű, síkbarajzolható gráf csúcsai kiszínezhetők 6 különböző színnel úgy, hogy a szomszédos csúcsok különböző színt kapjanak.

Házi feladat.

1. Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.
2. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!