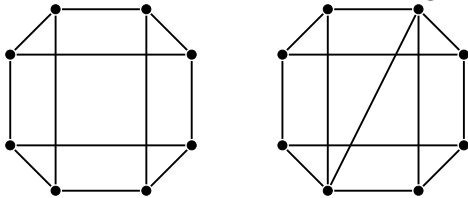


## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

2. gyakorlat, 2011. február 16.

### Perfekt gráfok

1. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf.
2. Legyenek a  $G_n$  gráf csúcsai az  $1, 2, 3, \dots, n$  számok, és legyen  $ij$  él, ha  $i$  és  $j$  relatív prímek. Határozzuk meg a  $\chi(G)$  és  $\omega(G)$  paramétereit. Perfekt-e a  $G_n$  gráf?
3. Képezzük a  $G'$  gráfot a  $G$  perfekt gráfból úgy, hogy egy  $G$ -től diszjunkt  $v$  csúcsot összekötünk  $G$  egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy  $G'$  is perfekt gráf.
4. A  $G$  gráf csúcsai legyenek a  $8 \times 8$ -as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos  $G$ -ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy  $3 \times 2$ -es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy  $G$  perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?
5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $G$  gráf pontosan akkor perfekt, ha  $G$  minden  $G'$  feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami  $G'$  minden maximális méretű klikkjét metszi.
6. a) Van-e olyan gráf, ami intervallumgráf, de nem egy intervallumgráf komplementere.  
b) Van-e olyan gráf, ami egy intervallumgráf komplementere, de nem intervallumgráf.
7. Írjuk le azokat a  $G$  gráfokat, amelyeknek minden  $H$  részgráfjára  $\omega(H) = \chi(H)$ .
8. Legyen  $G$  olyan  $n$  csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy  $n - 1$  nem lehet prímszám.
9. A  $G$  gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.
10. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



11. Legyen adott egy  $T$  fa és ennek  $F_1, \dots, F_n$  részfái. Megadunk egy  $G$  gráfot az  $\{F_1, \dots, F_n\}$  halmazon:  $F_i$  és  $F_j$  ( $i \neq j$ ) akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy  $G$  perfekt!
12. Igazoljuk, hogy ha a  $G$  gráf bármely feszített részgráfjának van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, akkor  $ch(G) \leq 6$ .
13. Ha az  $n$  csúcsú  $G$  gráf bármely  $k$  csúcsa legfeljebb  $4k$  élt feszít, akkor  $ch(G) \leq 9$  teljesül.
14. Nevezzünk egy gráfot keresztbe metszőnek, ha tetszőleges nem bővíthető klikkje és tetszőleges nem bővíthető független halmaza tartalmaz közös pontot.  $G$  öröklődően keresztbe metsző, ha minden feszített részgráfja keresztbe metsző. Mutassuk meg, hogy egy gráf akkor és csak akkor öröklődően keresztbe metsző, ha nem tartalmaz  $P_4$ -gyel (azaz 4 csúcsú úttal) izomorf feszített részgráfot. (Ne használjuk az erős perfekt gráf tételt.)  
Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban nincs  $P_4$ -gyel izomorf feszített részgráf, akkor a gráf perfekt.
15. Helyettesítsük a  $G$  perfekt gráf  $v$  csúcsát egy  $H$  perfekt gráffal, azaz a  $G - v$ -től diszjunkt  $H$  gráf minden csúcsát kössük össze  $v$  minden szomszédjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott  $G'$  gráf perfekt.

### Házi feladat

1. Perfekt-e az  $L(K_n)$  gráf?
2. Tegyük fel, hogy  $G$  perfekt gráf, és  $G$  csúcsainak  $X$  részhalmazára az igaz, hogy  $X$  bármely pontja szomszédos  $V(G) \setminus X$  tetszőleges pontjával. Bizonyítsuk be, hogy az a  $G'$  gráf is perfekt, amit úgy kapunk, hogy töröljük  $G$ -ből az  $X$  és  $V \setminus X$  között futó éleket.