

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

11. gyakorlat, 2011. május 4.

### Generátorfüggvények

1. Bizonyítsuk be, hogy  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$  ill., hogy  $F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ . ( $F_n$  a Fibonacci sorozat  $n$ -dik elemét jelöli.)
2. Mutassuk meg, hogy  $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ .
3. Mutassuk meg, hogy  $F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$ .
4. Oldjuk meg az  $a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$  rekurziót.
5. Oldjuk meg az  $a_0 = 3, a_1 = -3, a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$  rekurziót.
6. Oldjuk meg az  $a_0 = 3, a_1 = 6, a_2 = 0, a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$  rekurziót.
7. Adjuk meg állandó együtthatós lineáris rekurzióval  $c_n$ -t, ha  $c_n = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{17}-3}{2} \right)^n + \frac{1}{3} \left( \frac{-\sqrt{17}-3}{2} \right)^n$ .
8. Hányféleképpen mehetünk fel egy  $n$  fokból álló lépcsőn egyes és kettes lépésekkel?
9. Hányféleképp lehet lefedni egy  $2 \times n$ -es táblát  $1 \times 2$ -es és  $2 \times 2$ -es dominók felhasználásával?
10. Oldjuk meg az  $a_0 = 0, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$  rekurziót.
11. Legyen  $a_1 = 0$  és  $n \geq 1$  esetén  $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + n^2 - 1$ . Adjuk meg  $a_n$  értékét zárt alakban. Ugyanez a feladat  $a_1 = -1$  és  $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$  esetén.
12. Oldjuk meg az  $a_0 = 1, a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$  rekurziót.
13. Legyen  $g_0 = 1$  és  $g_n = g_{n-1} + 2g_{n-2} + \dots + (n-1)g_1 + ng_0$ . Adjuk meg  $g_n$ -t zárt alakban.
14. Mi a generátorfüggvénye az  $1, 1, 1, \dots$ , az  $1, 2, 4, 8, \dots$ , az  $1, 2, 3, 4, \dots$  és az  $1, 0, 1, 0, 1, \dots$  sorozatoknak?
15. Hogyan írhatók fel a  $c_n$  sorozat elemei az  $a_n$ , és  $b_n$  sorozat elemeivel, ha generátorfüggvényeikre teljesül, hogy  $C(x) = A(x)B(x)$ .

### Házi feladat

1. Legyen az  $a_0, a_1, \dots$  sorozatra  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, a_0 = 1, a_1 = x$ . Határozzuk meg, hogy milyen  $x$ -re lesz  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .
2. Jelentse  $g(n)$  az origóból induló olyan önmagát nem metsző  $n$  hosszú séták számát, melyekben minden lépés egy egységnyi északi, keleti vagy nyugati irányban. Fejezzük ki  $g(n)$  értékét!