Kombinatorika és gráfelmélet 2.

10. gyakorlat, 2011. április 20.

Hipergráfok

Az előző feladatsorról:

15. Adott síkon m egyenes. Tegyük fel, hogy az egyenesek nem illeszkednek ugyanarra a pontra, és hogy az egyenesek közül semelyik kettő sem párhuzamos. Bizonyítsuk be, hogy ezen egyenesek legalább m metszéspontot határoznak meg!

Új feladatok:

1. a. Egy fának legfeljebb hány *összefüggő* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak? b. Egy fának legfeljebb hány *feszített* részgráfját választhatjuk ki úgy, hogy egyik kiválasztott részgráf se legyen részgráfja egy másik kiválasztott részgráfnak?

2. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek 2^{n-1} tagja van és ezek közül semelyik kettő sem diszjunkt, akkor léteznek $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ olyan tagjai a rendszernek, amiknek pontosan egy közös elemük van.

3. Legyen $\mathcal{F}$ Egy olyan halmazrendszer, ami nem tartalmaz $s+1$ hosszú láncot (azaz $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{s+1}$ halmazokat). Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\binom{n}{k}} \leq s$, ahol f_k a k méretű halmazok számát jelöli.

4. Legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2n]}$ olyan metsző halmazrendszer, amely minden tagjának páros az elemszáma. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F}$-nek legfeljebb 2^{2n-2} tagja lehet.

5. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráfnak bármely két éle diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Legfeljebb hány éle lehet $\mathcal{H}$-nak?

6. Jelölje $S(n)$ az $[n]$ alaphalmaz Sperner tulajdonságú halmazrendszereinek számát. Mutassuk meg, hogy az n-valtozós monoton Boole-függvények száma $S(n)$. (Boole-függvénynek nevezzük a logikai függvényeket, azaz az n-változós Boole-függvény egy $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ függvény, és egy ilyen függvény akkor monoton, ha igaz, hogy egy igaz kiértékelésben néhány hamis változó igazra állításától a kiértékelés mindig igaz marad.)

7. Legfeljebb hány klubot alapíthat MOD-3-FALVA n lakója? Ha A_i jelöli az i-dik klub tagságát, akkor $|A_i| \not\equiv 0 \pmod 3$ és minden $i \neq j$-re $|A_i \cap A_j| \equiv 0 \pmod 3$. (*)

8. Tegyük fel, hogy egy n feladatból álló dolgozatban minden feladatra $0, 1$ vagy 2 pontot lehet kapni. Tegyük fel, hogy számos diák megírta a dolgozatot, de nincs két olyan diák, akik közül az egyik minden egyes feladatra legalább annyi pontot kapott, mint a másik. Bizonyítsuk be, hogy ha $a(k,l)$ jelöli a k pontot elérő diákok közül azoknak a számát, akik l feladatra kaptak 2 pontot, akkor $\sum_{\forall k,l} \frac{a(k,l) \cdot 2^{k-2l}}{\binom{2n}{k}} \leq 1$. (*)

9. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf nem tartalmaz kört, azaz nincs olyan páronként különböző csúcsokból és hiperélekből álló $x_1, E_1, x_2, E_2, \ldots x_k, E_k, x_{k+1} = x_1$ sorozat, ahol az E_i él tartalmazza az x_i és x_{i+1} csúcsokat. Mutassuk meg, hogy ha $\emptyset$ nem éle $\mathcal{H}$-nak és $\mathcal{H}$ összefüggő is (azaz V nem állítható elő két diszjunkt nemüres V_1 és V_2 halmaz uniójaként úgy, hogy minden hiperél valamelyik V_i halmaz része), akkor igaz, hogy $\sum\{|E| - 1 : E \in \mathcal{E}\} = |V| - 1$.

10. Mutassuk meg, hogy ha a $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ hipergráf 3-uniform, és $|E| \geq |V| - 1$, akkor $\mathcal{H}$ tartalmaz legalább 3 hosszú kört.

11. Egy páros gráf két osztálya A és B. Bármely két A–beli pontnak pontosan 97 közös szomszédja van, és bármely két B–beli pontnak pontosan 111. a. Mutassunk ilyen gráfot. b. Bizonyítsuk be hogy nincs ilyen gráf, amelyre $|A| = |B| = 1000$.

Tavalyi zárthelyi feladatok

1. Mutassuk meg, hogy $R(\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{k}) \leq k!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}) + 1$.

2. Tegyük fel, hogy a gömbön úgy adott 12, egymástól nem feltétlenül különböző pont, hogy azokból legalább 49 különböző egységtávolságra lévő pontpár választható ki. Igazoljuk, hogy a gömb sugara kisebb 1-nél.

3. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszernek nincs két diszjunkt tagja. Mutassuk meg, hogy van olyan $\mathcal{F}$-t tartalmazó $\mathcal{F}' \subseteq^{[n]}$ halmazrendszer, amire $\mathcal{F}'$ metsző és $|\mathcal{F}'| = 2^{n-1}$.

4. Legfeljebb hány vektort tartalmazhat az $X \subseteq \{0, 1\}^n$ halmaz, ha tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in X$ vektorokra létezik olyan $i \in [n]$ koordináta, amire $\underline{u}_i = 1$ és $\underline{v}_i = 0$?

Házi feladat

1. Mutassunk olyan $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszert, hogy $\mathcal{F}$ bármely két tagjának metszete legalább két elemet tartalmaz és $|\mathcal{F}| = 2^{n-2}$? Létezhet-e ennél nagyobb halmazrendszer a fenti tulajdonsággal?

2. Tegyük fel, hogy $k < n/2$ és $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ olyan metsző halmazrendszer, amire $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$. Mutassuk meg, hogy $[n]$-nek van olyan i eleme, amit $\mathcal{F}$ minden tagja tartalmaz. (Az Erdős-Ko-Rado tétel egyenlőség esete.)