Kombinatorika és gráfelmélet 1.

1. gyakorlat, 2011. február 9.

Listaszínezés, ismétlés

1. Határozzuk meg $ch(K_{2,4})$ értékét.
2. Legyenek $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2] \dots I_n = [a_n, b_n]$ korlátos, zárt intervallumok, és minden a_i, b_i legyen pozitív egész. Legyenek $p_1, p_2, \dots p_n$ egy gráf pontjai és $\{p_i, p_j\}$ akkor és csak akkor legyen él G-ben, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Az így előálló gráfokat *intervallumgráfoknak* nevezzük.
   Bizonyítsuk be, hogy ha G intervallumgráf, akkor $\chi(G) = \omega(G)$.
3. Bizonyítsuk be, hogy az előző feladat állítása nem teljesül, ha az intervallumokat egy körön vesszük fel.
4. Mutassuk meg, hogy $ch\left(K_{3,3,\dots,3}\right) > \left\lfloor \frac{2(2n-1)}{3} \right\rfloor$, ahol $K_{3,3,\dots,3}$ az a gráf, aminek a komplementere n diszjunkt K_3.
5. Mutassuk meg, hogy tetszőleges T legalább két pontú fára $ch(T) = 2$.
6. Igaz-e, hogy ha a G gráf minden csúcsához adott egy legalább $ch(G)$ méretű színlista, akkor G alkalmas csúcssorrend esetén mohón kiszínezhető úgy, hogy minden csúcsnak a listáján szereplő legkisebb olyan színt választjuk, ami nem azonos az eddig megszínezett, az adott csúccsal szomszédos csúcsok valamelyikének színével?
7. Igazoljuk, hogy ha a véges, egyszerű G gráf minden v csúcsára $|L(v)| > d(v)$ teljesül, akkor G L-listaszínezhető.
8. Jelölje $\chi''(G)$ a G gráf teljes kromatikus számát, azaz a minimális színszámot, ami szükséges érvényes teljes színezéshez úgy, hogy a csúcsokat és az éleket is színezzük, azzal a feltétellel, hogy érintkező elemek (összekötött csúcsok, közös csúccsal rendelkező élek, egy él és annak egy végpontja) nem lehetnek azonos színűek. Igazoljuk, hogy a listaszínezési sejtésből következne, hogy $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$ minden G gráfra.
9. Egy szigeten n család lakik. A sziget elöljárói felosztották az egész szigetet n egyenlő területű vadászati körzetre és ezzel egyidejűleg (az előbbitől függetlenül, ezért egészen más módon) felosztották az egész szigetet n egyenlő területű mezőgazdasági területre. Most azt szeretnék elérni, hogy minden családhoz tartozzon egy vadászati és egy mezőgazdasági terület úgy, hogy a két területnek legyen közös része. Megoldható-e ez mindig?
10. Egy asztalitenisz versenyen n résztvevő vesz részt, mindenki mindenkivel k-szor játszik. A verseny egy napján megkapjuk az addigi eredményeket. (Ezek teljesen esetlegesek abban a tekintetben, hogy ki hány ellenféllel és hányszor játszott már.) Adjunk polinomidejű algoritmust annak eldöntésére, hogy egy kijelölt résztvevő megnyerheti-e még a versenyt. (A versenyt akkor nyeri meg valaki, ha neki van a legtöbb győzelme. Döntetlenek nincsenek.)
11. Lilliputban a házasságok csak házsságközvetítő segítségével köthetők. Minden manófiú kapcsolatban áll bizonyos házasságkövetítőkkel, akik számára a házasságkötést megszervezhetik, és bizonyos manólányokkal, akiket feleségül vehet. Adott e kapcsolatok rendszere, valamint egy m szám, mely felső korlátja annak, hogy egy házasságközvetítő egy adott évben hány házasságkötést szervezhet. E bemeneti paraméterek birtokában adjunk polinomidejű algoritmust az adott évi házasságkötések számának maximalizálására.

Házi feladat

1. Bizonyítsuk be, hogy $ch(K_{n,m}) = n + 1$ minden pozitív egész n-re, ha $m \geq n^n$.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha G egy intervallumgráf komplementere, akkor $\chi(G) = \omega(G)$. (Tehát G pontjai reprezentálhatók intervallumokkal, és két pontot akkor kötünk össze, ha a nekik megfelelő intervallumok diszjunktak.)