

Kombinatorika és gráfelmélet 2.

6. gyakorlat, 2011. március 16.

A 4. és 6. feladat megoldása

1. Egy gráfot *külsíkgráfnak* nevezünk, ha lerajzolható a síkba az élek kereszteződése nélkül úgy, hogy minden csúcs rajta van az egyik (például a külső) tartomány határán. (a) Legfeljebb hány éle lehet egy külsíkgráfnak? (b) Adjunk a Kuratowski-tételhez hasonló karakterizációt a külsíkgráfokra, azaz adjunk meg egy olyan (véges) \mathcal{F} gráfalmazt, hogy igaz legyen a következő: egy gráf pontosan akkor külsíkgráf, ha nem tartalmaz \mathcal{F} -beli gráffal topologikusan izomorf részgráfot! (c) Legfeljebb mennyi a kromatikus száma egy külsíkgráfnak?
2. Legfeljebb mennyi a perfekt síkgráfok kromatikus száma?
3. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.
4. Legyen G egy tetszőleges gráf, csúcsai v_1, v_2, \dots, v_n , és $k \geq 3$. Képezzük a H gráfot úgy, hogy C_k , a k hosszú kör mindegyik csúcsát helyettesítjük G -vel. Pontosabban: H csúcsai v_i^j , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$, minden $1 \leq j \leq k$ -ra v_i^j és v_i^{j+1} össze van kötve H -ban akkor és csak akkor ha v_i és v_i össze van kötve G -ben, és minden $1 \leq j < m \leq k$ -ra v_i^j és v_i^m össze van kötve H -ban akkor és csak akkor ha $m = j + 1$ vagy $j = 1$ és $m = k$. Milyen G , k , esetén lesz H perfekt?

Megoldás: Ha k páratlan és legalább 5, akkor H nem lesz perfekt, mert tartalmaz k hosszú feszített kört: például v_1^j , $1 \leq j \leq k$. Ha G nem perfekt, akkor sem lesz perfekt, mert G feszített részgráfja H -nak: például v_i^1 , $1 \leq i \leq n$.

Ha viszont $k = 3$ vagy k páros, és G perfekt, akkor H is perfekt. Ez következik a következő feladat megoldásából. H -t úgy kapjuk C_k -ből, hogy sorban a csúcsait helyettesítjük G -vel.

5. Legyenek G_1 és G_2 perfekt gráfok, képezzük a G gráfot úgy, hogy G_1 egyik csúcsát helyettesítjük G_2 -vel. Pontosabban: G_1 egy v csúcsa helyére betesszük a G_2 gráfot, és G_2 összes csúcsát összekötjük v szomszédaival. Bizonyítsuk be, hogy G perfekt.
6. Adott egy ABC háromszög, és benne n pont. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható $\sqrt[3]{n}$ pont úgy, hogy bármely kettő által meghatározott egyenes a háromszögnek ugyanazt a két oldalát metszi.

Megoldás: Legyen P az n pont halmaza. Vezessünk be három relációt az n pont között.

$u \prec_A v$ akkor és csak akkor, ha $u = v$ vagy az uv egyenes u felőli meghosszabbítása az AB oldalt metszi, a v felőli meghosszabbítása az AC oldalt metszi.

$u \prec_B v$ akkor és csak akkor, ha $u = v$ vagy az uv egyenes u felőli meghosszabbítása a BC oldalt metszi, a v felőli meghosszabbítása a BA oldalt metszi.

$u \prec_C v$ akkor és csak akkor, ha $u = v$ vagy az uv egyenes u felőli meghosszabbítása a CA oldalt metszi, a v felőli meghosszabbítása a CB oldalt metszi.

Nem nehéz ellenőrizni, hogy ezek a relációk antiszimmetrikusak, reflexívek, és tranzitívak, tehát részbenrendezést definiálnak, és bármely két pont összehasonlítható pontosan az egyikkel.

A Dilworth tételből, vagy a duális Dilworth tételből következik, hogy ha egy m elemű részben rendezett halmazban a leghosszabb lánc mérete l , a legnagyobb antilánc mérete a , akkor $al \geq m$.

(P, \prec_A) egy részbenrendezett halmaz, így a fentiek miatt vagy van benne egy $\sqrt[3]{n}$ hosszú lánc, vagy egy $\sqrt[3]{n^2}$ méretű antilánc. Az első esetben készen vagyunk. A második esetben legyen P' az a $\sqrt[3]{n^2}$ pont amelyek antiláncot alkotnak.

(P', \prec_B) egy részbenrendezett halmaz, így a fentiek miatt vagy van benne egy $\sqrt[3]{n}$ hosszú lánc, vagy egy $\sqrt[3]{n}$ méretű antilánc. Az első esetben megint készen vagyunk. A második esetben az antiláncot alkotó pontok nem hasonlíthatóak össze az első két relációval, de ekkor bármely kettő összehasonlítható a harmadik, \prec_C relációval, így ismét készen vagyunk.