Tétel. (a) (Thomassen) *Minden síkbarajzolható gráf listaszínezési száma legfeljebb* 5. (b) (Voigt) *Van olyan síkbarajzolható gráf amelynek 5 a listaszínezési száma.*

Élek hozzáadásával nem csökkenhet a listaszínezési szám, ezért feltehetjük, hogy a gráfunk minden korlátos tartománya haromszög, a külső tartomány határa pedig egy kör. Az ilyen gráfokat *majdnem háromszögeltnek* hívjuk.

A Tétel (a) része azonnal következik az alábbi Lemmából.

Lemma. *Legyen G egy majdnem háromszögelt gráf, legyen B a külső tartományt határoló kör, és legyen x, y két szomszédos csúcs B–n. Tegyük fel, hogy*

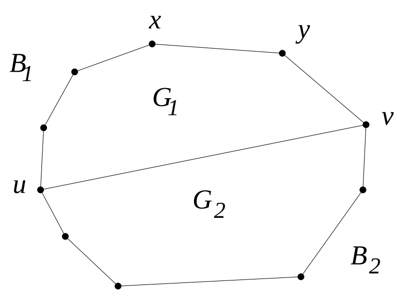
1. *x listája egy elemű: α (vagyis elő van írva a színe)*
2. *y listája egy elemű: β.*
3. *Minden további $z \in B$ csúcsnak 3 hosszú színlistája van.*
4. *A belső pontoknak 5 hosszú színlistája van.*

Ekkor G kiszínezhető az adott listákról.

Bizonyítás. (a) A csúcsszámra való indukcióval bizonyítunk. Három csúcsú gráfra az állítás triviális. Tegyük fel, hogy G–nek n csúcsa van, és kevesebb mint n csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást.

1. eset: B–nek van húrja, vagyis van két csúcs, u és v, amelyek b–n nem szomszédosak, és össze vannak kötve éllel. Az u és v csúcs B–t két részre vágja, B_1–re és B_2–re. Tegyük fel, hogy x és y, a speciális csúcsok B_1–en vannak. A G gráf felbomlik két majdnem háromszögelt részgráf uniójára, G_1–re, amelyet $B_1 \cup uv$ határolja, és G_2–re, amelyet $B_2 \cup uv$ határolja. Minden csúcsnak tartsuk meg az eddigi színlistáját. Az indukciós feltevés szerint G_1 kiszínezhető az adott listákról, színezzük ki, és tegyük fel, hogy u színe $C(u)$, v színe $C(v)$. Tekintsük most a G_2 gráfot az adott lisákkal. u listájaból töröljük az összes színt, kivéve $C(u)$–t, és v is listájaból töröljük az összes színt, kivéve $C(v)$–t.

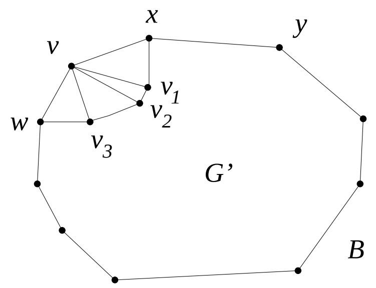
Az indukciós feltevés szerint G_2 kiszínezhető az adott listákról. Színezzük ki, ezután a két színezést összeilleszthetjük, és megkapjuk G megfelelő színezését.



1. eset: van átló

2. eset: B–nek nincs húrja. Legyen v az (α színű) x csúcs y–tól különböző szomszédja B–n. Legyenek $x, v_1, v_2, \ldots, v_t, w$ v szomszédai. Mivel G majdnem háromszögelt, ezek egymással sorban össze vannak kötve, persze mindegyik össze van kötve v–vel, x és w külső pontok (vagyis B–n vannak), $v_1, v_2, \ldots, v_t$ pedig belső pontok.

Legyen G' egy majdnem háromszögelt gráf, amelyet úgy kapunk, hogy töröljük v-t G–ből. G' külső B' köre $B \setminus \{v\} \cup \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$. A v csúcsnak 3 hosszú listája volt, tehát van benne két szín, mondjuk γ és δ, amelyek különböznek x színétől, α–tól. Töröljük γ–t és δ–t $v_1, v_2, \ldots, v_t$ listáiból, ha egyáltalán szerepelnek. Ha nem, akkor is csökkentsük le ezeknek a csúcsoknak a listáit 3 hosszúra. Most alkalmazhatjuk az indukciós feltevést G'–re, színezzük ki G' csúcsait a listákról. Végül tegyük vissza a v csúcsot. A γ és δ színek közül legalább az egyik különbözik w színétől. Színezzük v–t erre a színre. Ez G megfelelő színezését adja.

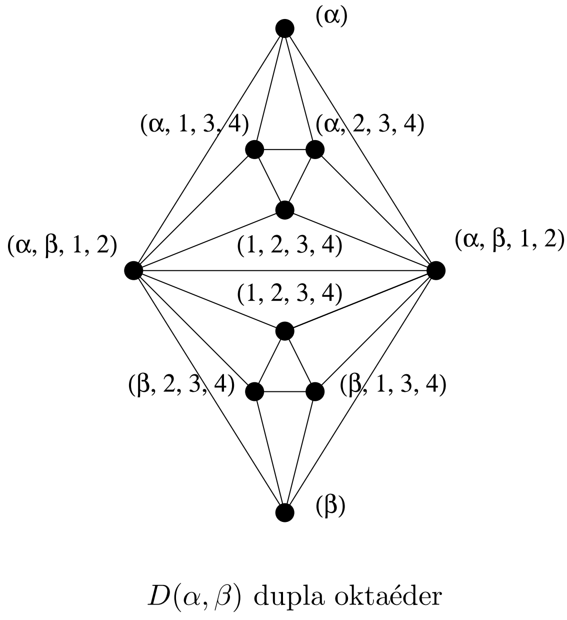


2. eset: nincs átló

(b) Most pedig mutatunk egy 130 csúcsú síkgráfot, 4 hosszú listákkal, amely nem színezhető az adott listákról.

Legyen $D(\alpha, \beta)$ az ábrán látható "dupla oktaéder" gráf, amelynek minden csúcsához tartozik egy színlista. Könnyen látható, hogy $D(\alpha, \beta)$ nem színezhető az adott listákról. Csak egy baj van vele, hogy a legfelső és legalsó csúcsához 1 hosszú lista tartozik.

Vegyük mind a 16 darab $D(\alpha, \beta)$ gráfot, ahol $\alpha \in \{5, 6, 7, 8\}$ és $\beta \in \{9, 10, 11, 12\}$. Ragasszuk őket össze a legfelső és a legalsó csúcsuknál, (azonosítsuk a legfelső illetve legalsó csúcsokat) és rendeljük a közös legfelső csúcshoz az $(5, 6, 7, 8)$, a közös legalsó csúcshoz pedig a $(9, 10, 11, 12)$ listákat. Ismét könnyű ellenőrizni, hogy ez a gráf nem színezhető az adott listákról. Ebből következik, hogy a listaszínezési száma legalább 5. Az pedig szinte triviális, hogy legfeljebb 5.



$D(\alpha, \beta)$ dupla oktaéder