

Tétel. (a) (Thomassen) Minden síkbarajzolható gráf listaszínezési száma legfeljebb 5. (b) (Voigt) Van olyan síkbarajzolható gráf amelynek 5 a listaszínezési száma.

Élek hozzáadásával nem csökkenhet a listaszínezési szám, ezért feltehetjük, hogy a gráfunk minden korlátos tartománya háromszög, a külső tartomány határa pedig egy kör. Az ilyen gráfokat *majdnem háromszögeltnek* hívjuk.

A Tétel (a) része azonnal következik az alábbi Lemmából.

Lemma. Legyen G egy majdnem háromszögelt gráf, legyen B a külső tartományt határoló kör, és legyen x, y két szomszédos csúcs B -n. Tegyük fel, hogy

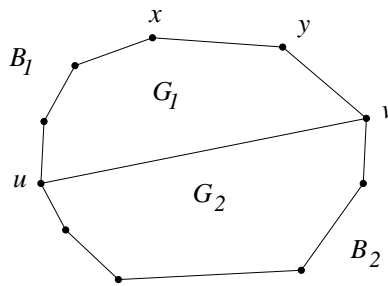
1. x listája egy elemű: α (vagyis elő van írva a színe)
2. y listája egy elemű: β , $\beta \neq \alpha$.
3. Minden további $z \in B$ csúcsnak 3 hosszú színlistája van.
4. A belső pontoknak 5 hosszú színlistája van.

Ekkor G kiszínezhető az adott listákról.

Bizonyítás. (a) A csúcsszámra való indukcióval bizonyítunk. Három csúcsú gráfra az állítás triviális. Tegyük fel, hogy G -nek n csúcsa van, és kevesebb mint n csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást.

1. eset: B -nek van húrja, vagyis van két csúcs, u és v , amelyek B -n nem szomszédosak, és össze vannak kötve éllel. Az u és v csúcs B -t két részre vágja, B_1 -re és B_2 -re. Tegyük fel, hogy x és y , a speciális csúcsok B_1 -en vannak. A G gráf felbomlik két majdnem háromszögelt részgráf uniójára, G_1 -re, amelyet $B_1 \cup uv$ határolja, és G_2 -re, amelyet $B_2 \cup uv$ határolja. Minden csúcsnak tartjuk meg az eddigi színlistáját. Az indukciós feltevés szerint G_1 kiszínezhető az adott listákról, színezzük ki, és tegyük fel, hogy u színe $C(u)$, v színe $C(v)$. Tekintsük most a G_2 gráfot az adott listákkal. u listájából töröljük az összes színt, kivéve $C(u)$ -t, és v is listájából töröljük az összes színt, kivéve $C(v)$ -t.

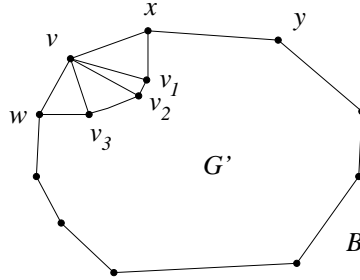
Az indukciós feltevés szerint G_2 kiszínezhető az adott listákról. Színezzük ki, ezután a két színezést összeilleszthetjük, és megkapjuk G megfelelő színezését.



1. eset: van átló

2. eset: B -nek nincs húrja. Legyen v az (α színű) x csúcs y -től különböző szomszédja B -n. Legyenek $x, v_1, v_2, \dots, v_t, w$ v szomszédai. Mivel G majdnem háromszögelt, ezek egymással sorban össze vannak kötve, persze mindegyik össze van kötve v -vel, x és w külső pontok (vagyis B -n vannak), v_1, v_2, \dots, v_t pedig belső pontok.

Legyen G' egy majdnem háromszögelt gráf, amelyet úgy kapunk, hogy töröljük v -t G -ből. G' külső B' köre $B \setminus \{v\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$. A v csúcsonak 3 hosszú listája volt, tehát van benne két szín, mondjuk γ és δ , amelyek különböznek x színétől, α -tól. Töröljük γ -t és δ -t v_1, v_2, \dots, v_t listáiból, ha egyáltalán szerepelnek. Ha nem, akkor is csökkentsük le ezeknek a csúcsoknak a listáit 3 hosszúra. Most alkalmazhatjuk az indukciós feltevést G' -re, színezzük ki G' csúcsait a listákról. Végül tegyük vissza a v csúcsot. A γ és δ színek közül legalább az egyik különbözik w színétől. Színezzük v -t erre a színre. Ez G megfelelő színezését adja.

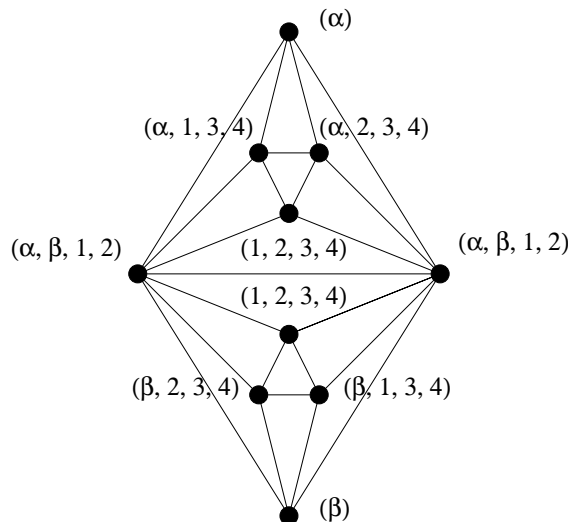


2. eset: nincs átló

(b) Most pedig mutatunk egy 130 csúcsú síkgráfot, 4 hosszú listákkal, amely nem színezhető az adott listákról.

Legyen $D(\alpha, \beta)$ az ábrán látható “dupla oktaéder” gráf, amelynek minden csúcsához tartozik egy színlista. Könnyen látható, hogy $D(\alpha, \beta)$ nem színezhető az adott listákról. Csak egy baj van vele, hogy a legfelső és legalsó csúcsához 1 hosszú lista tartozik.

Vegyünk mind a 16 darab $D(\alpha, \beta)$ gráfot, ahol $\alpha \in \{5, 6, 7, 8\}$ és $\beta \in \{9, 10, 11, 12\}$. Ragasszuk őket össze a legfelső és a legalsó csúcsuknál, (azonosítsuk a legfelső illetve legalsó csúcsokat) és rendeljük a közös legfelső csúcsához az $(5, 6, 7, 8)$, a közös legalsó csúcsához pedig a $(9, 10, 11, 12)$ listákat. Ismét könnyű ellenőrizni, hogy ez a gráf nem színezhető az adott listákról. Ebből következik, hogy a listaszínezési száma legalább 5. Az pedig szinte triviális, hogy legfeljebb 5.



$D(\alpha, \beta)$ dupla oktaéder