

Kuratowski tétel, Fáry-Wagner tétel

Először adunk egy bizonyítást ami egyszerre bizonyítja a Kuratowski és a Fáry-Wagner tételt. Utána egy sokkal egyszerűbb bizonyítást adunk a Fáry-Wagner tételre.

Tekintsünk egy tetszőleges G gráfot, és annak egy $e = xy$ élet. Legyen G' az a gráf, amelyet úgy kapunk G -ből, hogy G -hez hozzáveszünk egy új csúcsot, z -t, elhagyjuk az e életet, és behúzzuk az xz és zy éleket. Vagyis egy életet helyettesítünk egy 2 hosszú úttal. Most tekintsük ennek az ellenkezőjét, ha G -ben z foka kettő és a szomszédai x és y , akkor hagyjuk el z -t, és húzzuk be az xy életet. Nyilvánvaló, hogy ezek a műveletek nem változtatják meg egy gráf síkbarajzolhatóságát.

Definíció. Két gráfot topologikusan izomorfoknak nevezünk, ha a fenti két művelet alkalmazásával el lehet jutni az egyikből a másikba.

Könnyű ellenőrizni, hogy ez egy ekvivalencia reláció. A K_5 -tel topologikusan izomorf gráfokat röviden topologikus K_5 -nek is hívjuk. Ezeket a gráfokat úgy kaphatjuk meg, hogy egy K_5 minden életet helyettesítjük egy-egy tetszőlegesen hosszú úttal. Az eredeti, 4-fokú csúcsokat a topologikus K_5 fő csúcsainak hívjuk. Hasonlóan, a $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf gráfokat úgy kaphatjuk meg, hogy egy $K_{3,3}$ minden életet helyettesítjük egy-egy tetszőlegesen hosszú úttal. Az eredeti, 3-fokú csúcsokat a topologikus $K_{3,3}$ fő csúcsainak hívjuk.

Kuratowski tétel (Kuratowski 1930) *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz sem topologikus K_5 -öt, sem topologikus $K_{3,3}$ -mat.*

Fáry-Wagner tétel (Fáry 1948, Wagner 1936) *Minden síkgráf lerajzolható a síkra metszés nélkül úgy, hogy minden éle egyenes szakasz.*

A Kuratowski tétel esetén a szükségesség nyilvánvaló, hiszen K_5 és $K_{3,3}$ nem síkbarajzolhatók. Az elégségesség, illetve a Fáry-Wagner tétel az alábbi három, Thomassentől származó (1980) lemmából következik.

Legyen a G egyszerű gráf egyik éle e , végpontjai x és y . Az e él összehúzásával kapott gráfot G/e -vel jelöljük. Ezt úgy kapjuk G -ből, hogy az x és y csúcsokat helyettesítjük egy v_{xy} csúccsal, amelyet összekötünk x és y szomszédjaival.

1. Lemma *Legyen G egy 3-összefüggő és legalább 5 csúcsú gráf. Ekkor van olyan e éle, hogy G/e is 3-összefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nincs ilyen e él. Ekkor minden xy élre G/xy -nak van két elvágó pontja. Mivel G 3-összefüggő, a két elvágó pont egyike v_{xy} , amit x és y összehúzásával kaptunk. Legyen a másik z . Ekkor $\{x, y, z\}$ egy elvágó ponthalmaz G -ben. Mivel G 3-összefüggő, $\{x, y, z\}$ semelyik részhalmaza sem elvágó ponthalmaz, ezért x , y , és z mindegyikének van szomszédja $G \setminus \{x, y, z\}$ minden C komponensében. Válasszuk az xy élet és a C komponensét úgy, hogy C a lehető legkisebb legyen. Legyen v z egy szomszédja C -ben. A feltétel szerint G/zv sem 3-összefüggő, ezért megint van egy w csúcs, amelyre $\{z, v, w\}$ egy elvágó ponthalmaz, és ahogy az előbb, z , v , és w mindegyikének van szomszédja $G \setminus \{z, v, w\}$ minden komponensében.

Mivel x és y össze vannak kötve, $G \setminus \{z, v, w\}$ -nek ugyanabban a komponensében vannak, tehát van egy olyan D komponens, amelyben egyik sincs benne. Nyilván z sincs benne D -ben. A v csúcs minden z -től különböző szomszédja C -ben van, tehát $C \cap D \neq \emptyset$. Mivel C csak x -en, y -on és z -n keresztül érintkezik G többi részével, $D \subset C$, de $v \in C$, és $v \notin D$, így D kisebb, mint C , ellentmondás.

Definíció. Egy síkgráf lerajzolását konvex lerajzolásnak nevezzük, ha az élek egyenes szakaszok, nem metszik egymást, és minden tartomány határa (a nem korlátosé is) egy konvex sokszög.

2. Lemma *Legyen G egy 3-összefüggő gráf, amely nem tartalmaz topologikus K_5 -öt és topologikus $K_{3,3}$ -at. Ekkor G -nek van konvex lerajzolása.*

Bizonyítás. A csúcsszámmra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Ha $|V(G)| = n = 4$ vagy 5 , akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $n \geq 6$ és kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. Az 1. Lemma alapján van olyan $e = xy$ él, amelyre $G' = G/xy$ is 3-összefüggő. Legyen z az x és y összehúzásával kapott csúcs. Ha G' tartalmaz topologikus K_5 -öt vagy topologikus $K_{3,3}$ -at, akkor könnyű ellenőrizni, hogy G is tartalmaz. (Vigyázat, ha G' topologikus K_5 -öt tartalmaz, akkor lehet, hogy G topologikus $K_{3,3}$ -at!) Tehát G' nem tartalmaz topologikus K_5 -öt és $K_{3,3}$ -at, ekkor viszont az indukciós feltevés alapján G' -nek van konvex lerajzolása. $G' \setminus z$ 2-összefüggő, ezért $G' \setminus z$ lerajzolásában a z pontot tartalmazó cella határa egy C kör. C az eredeti G gráfban is kör, és ezen vannak x és y szomszédai (kivéve persze x -et és y -t). Legyenek x_1, \dots, x_k x szomszédai C -n, órajárás szerinti sorrendben, és legyen P_i C x_i és x_{i+1} közötti szakasza, a végpontokkal együtt. (Az indexeket ciklikusan értjük, $x_1 = x_{k+1}$, $P_1 = P_{k+1}$.) Ha valamilyen i -re, P_i tartalmazza y összes (x -től különböző) szomszédját, akkor könnyen megkaphatjuk G konvex lerajzolását, tegyük x -et z helyére, és y -t nagyon közel hozzá. (Abban az esetben ha C a nem korlátos tartomány határa, kicsit óvatosabbnak kell lenni.) Ha nem ez a helyzet, akkor vagy (i) x_1, \dots, x_k közül legalább három y -nak is szomszédja, vagy (ii) van olyan x_i, x_j és y -nak olyan u, v , szomszédja, hogy ez négy különböző csúcs, és C -n ezek az ux_ivx_j sorrendben szerepelnek. Az első esetben G tartalmaz egy topologikus K_5 -öt (a fő csúcsok x, y , és a három közös szomszéd), a második esetben G tartalmaz egy topologikus $K_{3,3}$ -at (a fő csúcsok x, y, ux_ivx_j).

Ezzel készen vagyunk 3-összefüggő gráfokra. A 3. lemmából következik az állítás a többi gráfra.

Vegyük észre, hogy a K_5 4-összefüggő, $K_{3,3}$ pedig 3-összefüggő, ennek alapján egy topologikus K_5 -ből 3 pontot elhagyva a megmaradt fő csúcsok egy komponensben maradnak, egy topologikus $K_{3,3}$ -ból 2 pontot elhagyva a megmaradt fő csúcsok egy komponensben maradnak. Sőt könnyen ellenőrizhető, hogy egy topologikus $K_{3,3}$ -ból 3 pontot elhagyva is csak egy fő csúcsot lehet leválasztani a többiről.

3. Lemma *Tegyük fel, hogy G -nek legalább 4 csúcsa van, és nem tartalmaz topologikus K_5 -öt és $K_{3,3}$ -at, de bármely élet hozzávéve már valamelyiket tartalmazza. Ekkor G 3-összefüggő.*

Bizonyítás. Megint a csúcsszámmra vonatkozó indukcióval bizonyítunk, ha $|V(G)| = n = 4$ vagy 5 , akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $n \geq 6$ és kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. Nem nehéz látni, hogy G 2-összefüggő, és ha $\{x, y\}$ egy elvágó halmaz, akkor x és y össze vannak kötve. Tegyük fel, hogy G nem 3-összefüggő. Ekkor van egy $\{x, y\}$ elvágó halmaza, és x, y össze vannak kötve. Legyen $G = G_1 \cup G_2$, ahol G_1 -nek és G_2 -nek legalább 3 csúcsa van, két közös csúcsuk és egy közös élük van, x, y , és xy . Ha hozzáadunk egy élet G_i -hez ($i = 1, 2$), akkor keletkezik egy topologikus K_5 vagy $K_{3,3}$, és nem nehéz látni, hogy ez teljes egészében G_i -ben van. Ezért G_i vagy egy háromszög, vagy az indukciós feltevés miatt 3-összefüggő. Ekkor viszont a 2. Lemma szerint van konvex lerajzolásuk. Legyen z_i G_i egy csúcsa, amely a lerajzolásban x -szel és y -nal azonos tartomány határán van. A feltétel szerint $G + z_1z_2$ tartalmaz egy K topologikus K_5 -öt vagy $K_{3,3}$ -at. A 3. Lemma előtti megállapítás miatt ekkor G_1 (vagy G_2) legfeljebb egy fő csúcs kivételével az összeset tartalmazza. (Ha K topologikus K_5 , akkor ráadásul G_1 az összes fő csúcsot tartalmazza.) Ekkor viszont abban a G'_1 gráfban is találhatunk topologikus K_5 -öt vagy $K_{3,3}$ -at, amelyet G_1 -ből úgy kapunk, hogy egy új csúcsot összekötünk x -szel, y -nal, és z_1 -gyel. Csakhogy ezek a csúcsok mind G_1 -ben ugyanannak a

tartománynak a határán vannak, ezért G'_1 is síkbarajzolható, ami ellentmond annak, hogy tartalmaz egy topologikus K_5 -öt vagy $K_{3,3}$ -at.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Most belátjuk csak a Fáry-Wagner tételt.

Egy síkbarajzolt gráfot *háromszögelésnek* nevezzük, ha a gráf egyszerű és minden tartományát, a végtelent is, három él határolja.

Először belátjuk, hogy minden síbarajzolt egyszerű gráf, amely nem háromszögelés, háromszögelhető, vagyis élek hozzáadásával minden tartományt feloszthatunk háromszögekre úgy, hogy a kapott gráf egyszerű marad. Ha az egyszerűséget nem követelnénk meg, az állítás triviális lenne, egyszerűen behúznánk minden tartományba annyi átlót, amennyi szükséges. De azt is könnyű elérni, hogy közben a gráf egyszerű maradjon. Elég belátni, hogy *egy* átlót be tudunk húzni úgy, hogy a gráf egyszerű maradjon. Ha G nem összefüggő, akkor van egy olyan tartománya, amit két különböző komponens is határol. Ebben a tartományban behúzhatunk egy élt a két komponens közé. Mostantól tehát feltesszük, hogy G összefüggő. Legyen T egy tartomány. Az összefüggőség miatt a határa is összefüggő, legyenek a csúcsok a határt körbejárva v_1, \dots, v_k . Tegyük fel, hogy valamelyik csúcs többször szerepel a határon, vagyis például $v_i = v_j$. Ekkor ez a $v = v_i = v_j$ csúcs G elvágó csúcsa. Vegyünk a v_1, \dots, v_k csúcsok közül kettőt, amelyek $G \setminus v$ különböző komponenseiben vannak, ezeket kössük össze T -n belül. Végül, ha minden T tartomány határa egy v_1, \dots, v_k kör (vagyis v_1, \dots, v_k csupa különböző csúcs) akkor válasszunk egy olyan tartományt, aminek legalább 4 csúcsa van. Ilyen biztos van, mert G nem háromszögelés. Próbáljuk behúzni a v_1v_3 élt. Ebben csak az akadályozhat meg minket, hogy T -n kívül v_1 és v_3 már össze van kötve. Ebben az esetben viszont v_2 és v_4 biztos hogy nincs összekötve T -n kívül, mert az metszené a v_1v_3 élt. Tehát ebben az esetben nyugodt lelkiismerettel behúzhatjuk a v_2v_4 élt T -n belül.

Ennek alapján elég a Fáry-Wagner tételt háromszögelésekre belátni. A következő tételből ez azonnal következik.

Tétel. Legyen G egy háromszögelés, a külső háromszög csúcsai a, b, c . Ekkor van G -nek olyan lerajzolása egyenes szakaszokkal, mint élekkel, metszés nélkül, ahol a külső tartomány határa éppen az abc háromszög.

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk. Ha G -nek 3 csúcsa van, akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy G -nek $n > 3$ csúcsa van, és n -nél kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást.

4. Lemma. Van olyan v, a, b, c -től különböző csúcs, amelynek a foka, $d(v) < 6$.

4. Lemma bizonyítása. Tegyük fel, hogy nincs ilyen csúcs. Legyen e G éleinek a száma. Mivel G egy háromszögelés, minden csúcs foka legalább 3. Tehát $d(a), d(b), d(c) \geq 3$ és ha $v \neq a, b, c$ akkor $d(v) \geq 6$. Csakhogy ekkor $2e = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6n - 9$ vagyis $e \geq 3n - 4$, ami lehetetlen, mivel egy n csúcsú síkgráfnak legfeljebb $3n - 6$ éle van.

Térünk vissza a Tétel bizonyítására. Legyen tehát v egy olyan a, b, c -től különböző csúcs, amelynek a foka, $d(v) < 6$. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $d(v) = 5$, legyenek v szomszédai v_1, \dots, v_5 . Hagyjuk el v -t G -ből. Mivel G egy háromszögelés, a kapott G' síkbarajzolt gráfnak is minden tartománya háromszög, kivéve a v_1, \dots, v_5 kört, amely a v csúcsot tartalmazta. Húzzunk be két átlót a v_1, \dots, v_5 kör belsejébe úgy, hogy a kapott G'' gráf egyszerű gráf maradjon. Nyilván G'' egy háromszögelés, a külső tartomány határa az abc háromszög. Alkalmazzuk az indukciós feltevést.

Így kapjuk G'' lerajzolása egyenes szakaszokkal, mint éllekként, metszés nélkül, ahol a külső tartomány határa az abc háromszög. Tehát a v_1, \dots, v_5 kör egy ötszöget határol, és az utólag behúzott két átló ennek a belsejében van. Hagyjuk el ezt a két átlót és helyezzük el v -t a két átló közös végpontja közelében, az ötszög belsejében. Ebből a v pontból mind az öt csúcs látszik, vagyis a vv_i szakaszok az ötszög belsejében vannak. Úgyhogy húzzuk is be bátran ezt az öt szakaszt, és ezzel megkaptuk G lerajzolását a feltételeknek megfelelően.

Ezzel beláttuk a Tételt, következésképpen a Fáry-Wagner tételt is.