

Kombinatorika és gráfelmélet II
2. Pót ZH, 2013. május 14. 14.15-15.45, H 406
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésén az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozathoz. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész megoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Az $R(10, 10) + 1$ csúcsú teljes gráf éleit kiszíneztük három színnel, pirossal, kézzel és zölddel, de csak egy él színe piros. Bizonyítsuk be, hogy található egy 10 csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű.

Hagyjuk el az egyetlen piros él egyik végpontját. 4 pont

Így egy $R(10, 10)$ csúcsú gráfot kaptunk, amelynek az élei két színnel vannak kiszínezve, kézzel és zölddel. 3 pont

$R(10, 10)$ definíciója szerint ebben a gráfban található egy 10 csúcsú teljes részgráf, amelynek minden éle ugyanolyan színű. Ez ez a részgráf természetesen az eredeti gráfban is megtalálható. 3 pont

2. Legyen $k > 0$ tetszőleges egész, és tegyük föl, hogy ki van színezve az összes valós szám k színnel. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan egyszínű, $a, b, c > 0$ számok, amelyekre $a^2 + b^2 = c^2$.

Definiáljunk egy új színezést a természetes számokon, a következő módon. Tetszőleges x természetes szám színe az új színezésben legyen ugyanaz, mint \sqrt{x} színe az eredeti színezésben. 5 pont

A Schur tétel szerint az új színezésben található három egyszínű szám, x, y és z , amelyekre $x + y = z$ ($x = y$ megengedett). 3 pont

Az eredeti színezésben az $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$ számok egyszínűek, és $a^2 + b^2 = c^2$. 2 pont

3. $\mathcal{F} \subseteq 2^{[2013]}$ egy 10 és 20 elemű halmazokból álló, metsző halmazrendszer. (A halmazrendszer semelyik két halmaza sem diszjunkt.) Mennyi $|\mathcal{F}|$ lehetséges legnagyobb értéke?

Legyen $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$ az \mathcal{F} halmazrendszer 10 elemű halmazainak családja, $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ pedig a 20 elemű halmazoké. 2 pont

A feltételek szerint \mathcal{F}_1 is, és \mathcal{F}_2 is metsző halmazrendszer, ezért az Erdős-Ko-Rado tétel szerint

$$|\mathcal{F}_1| \leq \binom{2012}{9}, |\mathcal{F}_2| \leq \binom{2012}{19},$$

tehát

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{2012}{9} + \binom{2012}{19}.$$

4 pont

Ennyi viszont el is érhető: vegyük az összes, az 1 elemet tartalmazó 10 és 20 elemű részhalmazokat. 4 pont

4. G egy 100 csúcsú és 3831 élű egyszerű gráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 9, páronként éldiszjunkt teljes 5 csúcsú részgráfot.

A Turán tétel szerint ha G -nek több éle van, mint a 100 csúcsú, 4 osztályú Turán gráf, $T(100, 4)$, akkor G tartalmaz teljes 5 csúcsú részgráfot. 3 pont

$T(100, 4)$ -nek $6 \cdot 25^2 = 3750$ éle van, tehát G -nek valóban több éle van, tartalmaz teljes 5 csúcsú részgráfot. Hagyjuk el ennek 10 élét, a maradék gráfnak 3821 éle van, továbbra is tartalmaz teljes 5 csúcsú részgráfot. Hagyjuk el ennek is az

éleit, és ezt ismételjük nyolcszor. Nyolc, páronként éldiszjunkt teljes 5 csúcú részgráf megtalálása, majd éleinek elhagyása után még mindig van 3751 élünk, így a megmaradt gráfban még található egy kilencedik teljes 5 csúcú részgráfot.
7 pont

5. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszeréről tudjuk, hogy minden $A \in \mathcal{F}$ -re $|A|$ páratlan, de minden $A, B \in \mathcal{F}$ -re $|A \cap B|$ páros. Bizonyítsuk be, hogy

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

Belátjuk, hogy \mathcal{F} egy Sperner rendszer, vagyis semelyik halmaza nem tartalmazza a másikat. Tegyük fel, hogy $A, B \in \mathcal{F}$ és $A \subset B$. Ekkor $|A \cap B| = |A|$. Viszont a feltételek szerint $|A \cap B|$ páros, $|A|$ pedig páratlan, ami egyszerre lehetetlen. Tehát nem lehet $A \subset B$.
7 pont

Ekkor a Sperner tétel szerint

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

3 pont

6. Az $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subseteq 2^{[n]}$ halmazrendszerben minden $i \neq j \neq k$ -ra $|A_i \cap A_j| = |A_k \cap A_l|$. Bizonyítsuk be, hogy $m \leq n + 1$.

Azt állítjuk, hogy az $\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ halmazrendszerben *bármely két* halmaz metszete egyforma méretű. 2 pont

Legyen $i \neq j, k \neq l$. Ha i, j közül valamelyik egyenlő k, l közül valamelyikkel, akkor a feladat feltétele alapján $|A_i \cap A_j| = |A_k \cap A_l|$. 2 pont

Ha viszont i, j, k, l mind különbözőek, akkor a feltétel alapján $|A_i \cap A_j| = |A_i \cap A_l| = |A_k \cap A_l|$. 2 pont

Tehát a halmazrendszerben bármely két halmaz metszete egyforma, mondjuk λ méretű. Ha $\lambda > 0$, akkor a Fisher egyenlőtlenségből adódik, hogy $m \leq n$. 2 pont

Ha $\lambda = 0$, vagyis bármely két halmaz diszjunkt, akkor minden elemet csak egy halmaz tartalmazhat, és még bevehetjük az üres halmazt is, tehát $m \leq n + 1$. (Ugyanezt kapjuk a Frankl-Wilson tétel alkalmazásával: $m \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = n + 1$.)
2 pont