Kombinatorika és gráfelmélet II

1. ZH, 2013. március 18. 10.15-11.45, Kf 81

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G összefüggő, síkbarajzolt gráfnak 200 éle van, duálisa egyszerű, páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legfeljebb 100 csúcsa van.

1. megoldás: Legyen n és e G csúcsainak illetve éleinek a száma. Mivel G összefüggő, nincs izolált pontja. 1 pont

G duálisa egyszerű, ezért G-ben 1 fokú és 2 fokú csúcs sem lehet, mert ez hurokélet illetve többszörös élet jelentene a duálisban. 2 pont

Egy k fokú csúcs G-ben egy k hosszú körsétát jelentene a duálisban. Mivel G duálisa páros gráf, ezért minden körsétája páros hosszú, tehát G-ben minden pont foka páros. 3 pont

Ezekből következik, hogy G-ben minden pont foka legalább 4, $e \geq 2n$, tehát $200 \geq 2n$ vagyis $100 \geq n$. 4 pont

2. megoldás: Legyen n, e, t G csúcsainak, éleinek és tartományainak a száma, n^*, e^*, t^* pedig G^*, G duálisa csúcsainak, éleinek és tartományainak a száma. Tudjuk, hogy $e = e^* = 200$. 1 pont

Mivel G^* egyszerű, páros síkgráf, $e^* \leq 2n^* - 4$, ebből $n^* \geq 102$. 5 pont

De $t = n^*$, tehát $t \geq 102$. 2 pont

Mivel G összefüggő, az Euler formula alapján $n - e + t = 2$ behelyettesítve $n - 200 + 102 \leq 2$, vagyis $n \leq 100$. 2 pont

2. Legyen $G(V, E)$ egy gráf, amelyre $E = E_1 \cup E_2$, $G_1(V, E_1)$ síkgráf, a $G_2(V, E_2)$ gráf pedig néhány független élből áll. (Független élek: nincs közös végpontjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 8$. (Vagyis egy síkgráf és néhány független él uniójának kromatikus száma legfeljebb 8.)

1. megoldás: Jelölje n G csúcsainak a számát. Indukcióval bizonyítjuk be az állítást. $n \leq 8$-ra nyilvánvalóan igaz, hiszen minden csúcsot színezhetünk különböző színűre. Tegyük fel, hogy $n > 8$ és kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. 2 pont

$G_1(V, E_1)$ síkgráf, ezért legfeljebb $3n - 6$ éle van. 1 pont

$G_2(V, E_2)$ pedig néhány független élből áll, ezért legfeljebb $n/2$ éle van. 1 pont

Ebből következik hogy G-nek legfeljebb $3.5n - 6$ éle van, tehát van egy v csúcsa, amelynek a foka legfeljebb 6. 2 pont

A $G \setminus v$ gráf is teljesíti a feltételeket, tehát az indukciós feltevés szerint kiszínezhető 8 színnel. 2 pont

A v csúcsnak csak 6 szomszédja van, így a nyolc szín közül legalább egy (sőt, kettő!) különbözik ezek színétől, ezzel kiszínezhetjük v-t. 2 pont

Megjegyzés: ezzel a bizonyítással az is kijön, hogy **hét** szín is elég.

2. megoldás: $G_1(V, E_1)$ síkgráf, ezért a Négyszíntétel szerint kiszínezhető négy színnel, legyenek ezek P, K, Z, S. 2 pont

$G_2(V, E_2)$ pedig független élekből áll, ezért kiszínezhető két színnel, legyenek ezek 1, 2. 2 pont

Tekintsük ennek a két színezésnek a *szorzatát*, vagyis minden pont kapja a (P, 1), (K, 1), (Z, 1), (S, 1), (P, 2), (K, 2), (Z, 2), (S, 2) színek valamelyikét a két eredeti színnek megfelelően. 3 pont

Ez egy jó színezés nyolc színnel. Ha két pont össze van kötve G-ben, akkor van G_1-ben vagy G_2-ben is össze vannak kötve, ezért G_1 vagy G_2 színezésben különböző színt kaptak. Ezért a szorzat-színük is különböző. 3 pont

3. Tetszőleges 100 csúcsú G síkbarajzolt gráfra legyenek $d_1, d_2, \ldots, d_{100}$ a csúcsok fokszámai, $t = t(G)$ a tartományok száma, és legyenek F_1, F_2, $\ldots$, F_t a tartományok (beleértve a végtelen

tartományt is). $|F_i|$ jelentse az F_i tartomány határán lévő élek számát (ha egy él mindkét oldaláról határolja a tartományt, akkor kétszer számoljuk). Határozzuk meg az

$$s(G) = \sum_{i=1}^{t} (|F_i| - 2) - \sum_{i=1}^{100} d_i$$

mennyiség maximumát és minimumát, ha G tetszőleges egyszerű 100 csúcsú összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.

1. megoldás: Legyen e G éleinek a száma. $s(G) = \sum_{i=1}^{t}(|F_i|-2) - \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{t}|F_i| - \sum_{i=1}^{t} 2 - \sum_{i=1}^{n} d_i = 2e - 2t - 2e = -2t$. 4 pont

Egy egyszerű 100 csúcsú összefüggő síkbarajzolt gráfnak akkor van a legtöbb tartománya, ha minden tartomány háromszög. Ilyenkor $e = 3 \cdot 100 - 6 = 294$ és az Euler formulából $t = 2 - n + e = 196$. 2 pont

A legkevesebb tartománya pedig akkor van, ha fa, ekkor $t = 1$. 1 pont

Tehát $1 \leq t \leq 196$, ebből $-392 \leq s(G) \leq -2$. 3 pont

2. megoldás: Legyen e G éleinek a száma. $\sum_{i=1}^{t}(|F_i|-2) = \sum_{i=1}^{t}|F_i| - \sum_{i=1}^{t} 2 = 2e - 2t = 2(n-2) = 196$ az Euler formulát felhasználva. 3 pont

Tehát $s(G) = \sum_{i=1}^{t}(|F_i|-2) - \sum_{i=1}^{n} d_i = 196 - \sum_{i=1}^{n} d_i = 196 - 2e$. 3 pont

Mivel G egyszerű 100 csúcsú összefüggő síkgráf, $n - 1 \leq e \leq 3n - 6$ tehát $99 \leq e \leq 294$. 1 pont

Ebből $-392 \leq 196 - 2e \leq -2$, vagyis $-392 \leq s(G) \leq -2$. 3 pont

4. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, v_i és v_j között akkor és csak akkor van él, ha $i + j$ páros vagy $i + j = n + 1$. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf perfekt.

1. megoldás. Legyen A a páros indexű csúcsok halmaza, B a páratlan indexűeké. Az A halmaz bármely két eleme között van él, vagyis teljes gráfot feszít. Hasonlóan a B halmaz is. 5 pont

Tehát G egy páros gráf komplementere, amiről tudjuk, hogy perfekt. 5 pont

2. megoldás. Be kell látni, hogy minden feszített G' részgráfra $\omega(G') = \chi(G')$. 2 pont

Legyen A a G' páros indexű csúcsainak a halmaza, B a páratlan indexűeké. G' egy teljes gráfot alkot A-n illetve B-n, es van néhány független él A és B között. Az általánosság megszorítása nélkül (szimmetria okokból) feltehetjük, hogy $|A| \geq |B|$. 5 pont

Ha $|A| \geq 2$, akkor a legnagyobb klikket éppen A pontjai alkotják, vagyis $\omega(G') = |A|$, es $|A|$ színnel könnyedén ki tudjuk színezni G' csúcsait. 1 pont

Ha $|B| = 0$, akkor is egyszerű a helyzet, mert akkor G' egy A pontjaiból állo klikk, megint $\omega(G') = \chi(G') = |A|$. 1 pont

Ha pedig $|A| = |B| = 1$, akkor G' vagy két független pontból áll, (ekkor $\omega(G') = \chi(G') = 1$), vagy két összekötött pontból (ekkor $\omega(G') = \chi(G') = 2$). 1 pont

5. G olyan gráf, ami *nem* síkgráf, de bármely élét elvéve síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \leq 4$. ($\Delta(G)$ a maximális fokszám G-ben.)

Mivel G nem síkgráf, a Kuratowski tétel szerint tartalmaz egy topologikus K_5-öt, vagy topologikus $K_{3,3}$-at. 2 pont

Ha ezen kívül is lenne éle G-nek, akkor ezt elhagyva meg mindig maradna egy topologikus K_5 vagy topologikus $K_{3,3}$ mint részgráf, tehát továbbra sem lenne a kapott gráf síkgráf. 3 pont

Ez ellentmond a feltételeknek, tehát G *maga* egy topologikus K_5 vagy topologikus $K_{3,3}$. 3 pont

Ezekben viszont minden pont foka legfeljebb 4. 2 pont

6. Adott 10 egyforma hosszú, különböző intervallum egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy vagy van olyan pont amelyet legalább 4 intervallum tartalmaz, vagy pedig van 4 páronként diszjunkt intervallum.

1. megoldás: Legyenek az intervallumok $I_1, I_2, \ldots, I_{10}$, a bal végpontjuk szerint rendezve balról jobbra. 2 pont

Ha I_1, I_4, I_7 és I_{10} páronként diszjunktak, akkor készen vagyunk. 4 pont

Ha nem, akkor valamelyik kettő metszi egymást, de akkor a rendezés miatt két szomszédos (amelyeknek az indexe hárommal különbözik) is metszi egymást. Legyenek ezek I_i és I_{i+3}. Ekkor viszont ezek metszetét tartalmazza I_{i+1} és I_{i+2} is, és már meg is van a pont amelyet legalább 4 intervallum tartalmaz. 4 pont

2. megoldás: Legyen G az $I_1, I_2, \ldots, I_{10}$ intervallumok által feszített intervallum metszés gráf (intervallumgráf). 2 pont

Tudjuk, hogy G perfekt, tehát $\alpha(G)\omega(G) \geq 10$. 4 pont

Tehát vagy $\alpha(G) \geq 4$, ekkor van 4 páronként diszjunkt intervallum, 2 pont

vagy $\omega(G) \geq 4$, ekkor van 4 páronként metsző intervallum. Ezeknek viszont van közös pontjuk, tehát van olyan pont amelyet legalább 4 intervallum tartalmaz. 2 pont