

## Kombinatorika és gráfelmélet 2.

8. gyakorlat, 2013. április 2.

### *Turán-tétel*

Legyen  $n, r \geq 1$ . Az  $n$  csúcsú,  $r$  osztályú  $T(n, r)$  **Turán gráfnak**  $n$  csúcsa van,  $r$  osztályba osztva a lehető legegyszerűbben: ha  $n = ar + b$ ,  $r > b \geq 0$ , akkor  $b$  osztályban  $\lceil n/r \rceil$  csúcs van,  $r - b$  osztályban pedig  $\lfloor n/r \rfloor$  darab. Bármely két, különböző osztályhoz tartozó csúcs össze van kötve, az azonos osztályban levők nem.

Tetszőleges  $G$  gráfra legyen  $|E(G)|$  éleinek a száma.

**Turán tétel (1941).** Ha  $G$  egy  $n$  csúcsú gráf ami nem tartalmaz  $K_{r+1}$ -et részgráfként, akkor  $|E(G)| \leq |E(T(n, r))|$ . Ha pedig  $|E(G)| = |E(T(n, r))|$ , akkor  $G$  izomorf a  $T(n, r)$  Turán gráffal.

**Erdős, Kővári, Sós, Turán tétel (1954)** Egy  $n$  csúcsú gráfnak, amely nem tartalmaz  $K_{2,2} = C_4$ -et részgráfként, legfeljebb  $cn^{3/2}$  éle van, valamilyen  $c > 0$  konstansra.

- Legfeljebb hány éle lehet egy  $n$  pontú gráfnak, ha nincsen benne
  - kör?
  - páratlan kör? (páros lehet)
  - páros kör? (páratlan lehet)
  - 2 élből álló út?
  - sem 3 élből álló út, sem kör?
  - feszítőfa?
- Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük tíz embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.
- Igazoljuk, hogy az  $n$ -csúcsú,  $m$ -osztályú  $T_{n,m}$  Turán-gráf pontosan akkor nem tartalmaz Hamilton-kört, ha  $m = 2$  és  $n$  páratlan.
- Legyenek  $v_1, v_2, \dots, v_n$  síkbeli vektorok,  $|v_i| \geq 1$ . Legalább hány párra lesz  $|v_i + v_j| \geq 1$ ?
- Legkevesebb hány csúcsa lehet egy háromszögmentes, egyszerű  $G$  gráfnak, ha  $|E(G)| \geq 2|E(K_k)|$ ?
- Adott a síkon  $n$ , nem feltétlenül különböző pont. Legfeljebb mennyi lehet az ezek közül kiválasztható egységnyi távolságra levő pontpárok száma?
- Mutassuk meg, hogy sík  $n$  különböző pontja és  $n$  különböző egyenese között legfeljebb  $c \cdot n^{3/2}$  illeszkedés lehet, ahol  $c$  alkalmas konstans. (Illeszkedés: egy (pont, egyenes) pár, ahol a pont illeszkedik az egyenesre.)
- Legfeljebb hány éle lehet egy  $n$  csúcsú gráfnak, ha élei kiszínezhetők úgy két színnel, hogy ne keletkezzen egyszínű háromszög.

### Házi feladat

- a. Egy  $G$  gráfnak  $n$  csúcsa van, és minden csúcs fokszáma legalább 100. Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartalmaz 100 hosszú (100 csúcsú) utat!  
b. Egy  $G$  gráfnak  $n$  csúcsa és  $e$  éle van,  $e > 100n$ . Bizonyítsuk be, hogy  $G$  tartalmaz 100 hosszú (100 csúcsú) utat!
- Mutassunk minden  $n$ -re olyan  $n$  csúcsú és  $e > 40n - 5000$  élű gráfot, amelyben nincs 100 hosszú (100 csúcsú) út!