Részben rendezett halmazok, Dilworth tétel.

Legyen H egy halmaz, es $\preceq$ egy reláció H elemein. A $\preceq$ reláció

reflexív, ha minden $a \in H$ esetén $a \preceq a$;

antiszimmetrikus, ha $a \preceq b, b \preceq a \longrightarrow a = b$;

tranzitív, ha $a \preceq b, b \preceq c \longrightarrow a \preceq c$.

Egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt **részbenrendezésnek** hívunk, a $(H, \preceq)$ párt pedig részben rendezett halmaznak. Ha $a \preceq b$ és $a \neq b$, azt úgy jelöljük, hogy $a \prec b$.

Mostantól legyen $(H, \preceq)$ egy részben rendezett halmaz. Az $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset H$ részhalmazt **láncnak** hívjuk, ha $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_k$, és **antiláncnak**, ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ közül semelyik kettő sem összehasonlítható.

Dilworth tétel. Legyen a a $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazban található legnagyobb antilánc mérete. Ekkor H felbontható a darab lánc uniójára, kevesebbre viszont nem.

duális Dilworth tétel. Legyen l a $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazban található legnagyobb lánc mérete. Ekkor H felbontható l darab antilánc uniójára, kevesebbre viszont nem.

A következőkben bebizonyítjuk a duális Dilworth tételt, majd ebbol a gyenge perfekt gráf tétel felhasználásával a Dilworth tételt.

A duális Dilworth tétel bizonyítása. Tetszőleges $a \in H$ elemre legyen $r(a)$ a leghosszabb, a-ban végződő lánc hossza. (Formálisabban: $r(a)$ az a legnagyobb r szám, amihez létezik $\{a = a_1, a_2, \ldots, a_r\} \subset H$ ahol $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_r$.)

Tegyük fel, hogy $r(a) = r(b) = r$, és $b \prec a$. Ekkor létezik egy r hosszú a-ban végződő lánc, $a = a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_r$, amelynek a végére még odatehetjük b-t, így egy b-ben végződő, $r+1$ hosszú láncot kapunk, $b \prec a = a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_r$, ami ellentmondás. Hasonlóan járhatunk el ha $a \prec b$. Tehát ha $r(a) = r(b)$, akkor a és b nem összehasonlíthatóak. Világos, hogy minden $a \in H$ esetén $1 \leq r(a) \leq l$. Legyen $A_k = \{\ a \in H \mid r(a) = k\ \}$. Ekkor az előbbiek alapján minden k-ra A_k egy antilánc, és $H = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_l$.

Kevesebb antilánc uniójára nem bontható fel H, mert egy lánc és egy antilánc legfeljebb egy elemben metszhetik egymást.

A $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazhoz tartozó $G(H)$ összehasonlítás gráf csúcsai H elemei, két elem akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha összehasonlíthatóak.

Lemma. Az összehasonlítás gráfok perfektek.

Mivel egy összehasonlítás gráf feszített részgráfjai is összehasonlítás gráfok, elég belátni, hogy ha G összehasonlítás gráf, akkor $\chi(G) = \omega(G)$. Ez a duális Dilworth tételből azonnal következik: $G = G(H)$-ban egy klikk éppen egy láncnak felel meg, tehát $\omega(G)$ a leghosszabb lánc mérete. G színezésében egy színosztály összehasonlíthatatlan elemekből áll, tehát egy színezés megfelel H antiláncokra való felbontásának. Az előbb pedig beláttuk, hogy H felbomlik $\omega(G)$ darab antiláncra, kevesebbre nem, tehát $\chi(G) = \omega(G)$.

A Dilworth tétel bizonyítása. Tekintsük a $\overline{G} = \overline{G(H)}$ gráfot, amely $G(H)$ komplementere. Ebben éppen a nem összehasonlítható elemek vannak összekötve. A gyenge perfekt gráf tétel miatt, mivel $G(H)$ perfekt, $\overline{G(H)}$ is perfekt, ezért $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

Az $\overline{G}$ gráfban egy klikk éppen egy antiláncnak felel meg, tehát $\omega(\overline{G})$ a legnagyobb antilánc mérete. $\overline{G}$ színezésében egy színosztály elemei között nincs él, tehát bármely kettő összehasonlítható, vagyis láncot alkotnak. Tehát egy színezés megfelel H láncokra való felbontásának. Mivel $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$, ez azt jelenti, hogy H felbontható $\omega(\overline{G})$ darab lánc uniójára, kevesebbre pedig nem.