Részben rendezett halmazok, Dilworth tétel.

Legyen H egy halmaz, es $\preceq$ egy reláció H elemein. A $\preceq$ reláció

reflexív, ha minden $a \in H$ esetén $a \preceq a$;

antiszimmetrikus, ha $a \preceq b, b \preceq a \longrightarrow a = b$;

tranzitív, ha $a \preceq b, b \preceq c \longrightarrow a \preceq c$.

Egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt **részbenrendezésnek** hívunk, a $(H, \preceq)$ párt pedig részben rendezett halmaznak. Ha $a \preceq b$ és $a \neq b$, azt úgy jelöljük, hogy $a \prec b$.

Mostantól legyen $(H, \preceq)$ egy részben rendezett halmaz. Az $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset H$ részhalmazt **láncnak** hívjuk, ha $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_k$, és **antiláncnak**, ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ közül semelyik kettő sem összehasonlítható.

Dilworth tétel. Legyen a a $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazban található legnagyobb antilánc mérete. Ekkor H felbontható a darab lánc uniójára, kevesebbre viszont nem.

duális Dilworth tétel. Legyen l a $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazban található legnagyobb lánc mérete. Ekkor H felbontható l darab antilánc uniójára, kevesebbre viszont nem.

A következőkben bebizonyítjuk a duális Dilworth tételt, majd ebbol a gyenge perfekt gráf tétel felhasználásával a Dilworth tételt. Ezután adunk egy direkt bizonyítást is a Dilworth tételre.

A duális Dilworth tétel bizonyítása. Tetszőleges $a \in H$ elemre legyen $r(a)$ a leghosszabb, a-ban végződő lánc hossza. (Formálisabban: $r(a)$ az a legnagyobb r szám, amihez létezik $\{a = a_1, a_2, \ldots, a_r\} \subset H$ ahol $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_r$.)

Tegyük fel, hogy $r(a) = r(b) = r$, és $b \prec a$. Ekkor létezik egy r hosszú a-ban végződő lánc, $a = a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_r$, amelynek a végére még odatehetjük b-t, így egy b-ben végződő, $r + 1$ hosszú láncot kapunk, $b \prec a = a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_r$, ami ellentmondás. Hasonlóan járhatunk el ha $a \prec b$. Tehát ha $r(a) = r(b)$, akkor a és b nem összehasonlíthatóak. Világos, hogy minden $a \in H$ esetén $1 \leq r(a) \leq l$. Legyen $A_k = \{\ a \in H \mid r(a) = k\ \}$. Ekkor az előbbiek alapján minden k-ra A_k egy antilánc, és $H = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_l$.

Kevesebb antilánc uniójára nem bontható fel H, mert egy lánc és egy antilánc legfeljebb egy elemben metszhetik egymást.

A $(H, \preceq)$ részben rendezett halmazhoz tartozó $G(H)$ összehasonlítás gráf csúcsai H elemei, két elem akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha összehasonlíthatóak.

Lemma. Az összehasonlítás gráfok perfektek.

Mivel egy összehasonlítás gráf feszített részgráfjai is összehasonlítás gráfok, elég belátni, hogy ha G összehasonlítás gráf, akkor $\chi(G) = \omega(G)$. Ez a duális Dilworth tételből azonnal következik: $G = G(H)$-ban egy klikk éppen egy láncnak felel meg, tehát $\omega(G)$ a leghosszabb lánc mérete. G színezésében egy színosztály összehasonlíthatatlan elemekből áll, tehát egy színezés megfelel H antiláncokra való felbontásának. Az előbb pedig beláttuk, hogy H felbomlik $\omega(G)$ darab antiláncra, kevesebbre nem, tehát $\chi(G) = \omega(G)$.

A Dilworth tétel bizonyítása. Tekintsük a $\overline{G} = \overline{G(H)}$ gráfot, amely $G(H)$ komplementere. Ebben éppen a nem összehasonlítható elemek vannak összekötve. A gyenge perfekt gráf tétel miatt, mivel $G(H)$ perfekt, $\overline{G(H)}$ is perfekt, ezért $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

Az $\overline{G}$ gráfban egy klikk éppen egy antiláncnak felel meg, tehát $\omega(\overline{G})$ a legnagyobb antilánc mérete. $\overline{G}$ színezésében egy színosztály elemei között nincs él, tehát bármely kettő összehasonlítható, vagyis láncot alkotnak. Tehát egy színezés megfelel H láncokra való felbontásának. Mivel $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$, ez azt jelenti, hogy H felbontható $\omega(\overline{G})$ darab lánc uniójára, kevesebbre pedig nem.

Most pedig belátjuk a Dilworth tételt a gyenge perfekt gráf tétel felhasználása nélkül.

A Dilworth tétel direkt bizonyítása. (Tverberg, 1967) Tehát legyen a a $(H, \preceq)$ n elemű részben rendezett halmazban található legnagyobb antilánc mérete, be kell látnunk, hogy H felbontható a darab lánc uniójára, kevesebbre viszont nem. Az triviális, hogy kevesebbre nem bontható fel, mert az a elemű antilánc minden eleme más láncba kell, hogy kerüljön.

Azt, hogy a darab láncra pedig felbontható, n szerinti indukcióval látjuk be. Nyilvánvaló, hogy az állítás teljesül $n = 1$-re. Tegyük fel, hogy $n > 1$ és kisebb elemszámú részben rendezett halmazokra már beláttuk az állítást. Legyen L egy maximális lánc H-ban, amelynek a maximális eleme x, minimális eleme y. $H \setminus L$-ben a maximális antilánc mérete vagy a, vagy $a - 1$, hiszen, több nem lehet, mint H-ban, viszont maximum eggyel csökkenhet, mert egy lánc és egy antilánc legfeljebb egy elemben metszi egymást. Ha $H \setminus L$-ben a maximális antilánc mérete $a - 1$, akkor az indukciós feltevés szerint $H \setminus L$ felbomlik $a-1$ láncra. Ezekhez hozzávéve L-et, éppen H egy felbontását kapjuk a darab láncra.

Tehát feltehetjük, hogy $H \setminus L$-ben a maximális antilánc mérete a. Legyen $A = \{z_1, \dots, z_a\}$ egy maximális antilánc $H \setminus L$-ben. Legyen

$$H^+ = \{\, h \in H \mid \exists z \in A : z \preceq h\}, \qquad H^- = \{\, h \in H \mid \exists z \in A : h \preceq z\}.$$

Mivel A egy maximális antilánc H-ban is, bármely $h \in H$ összehasonlítható A valamelyik elemével, tehát $H^+ \cup H^- = H$. Ugyanakkor, ha $h \in H^+ \cap H^-$ és $h \notin A$, akkor valamilyen i, j-re $z_i \prec h \prec z_j$, de akkor $z_i \prec z_j$, ami lehetetlen, mert A egy antilánc. Tehát $H^+ \cap H^- = A$.

Tegyük fel, hogy $x \in H^-$. Tudjuk, hogy L és A diszjunktak, tehát $x \notin A$, ezért valamilyen i-re $x \prec z_i$. De ebben az esetben az L láncot meg lehetne hosszabbítani z_i-vel, ami ellentmond annak, hogy L egy maximális lánc. Tehát $x \notin H^-$. Hasonlóan belátható, hogy $y \notin H^+$. Ebből az következik, hogy $|H^+| < n$ és $|H^-| < n$.

Tehát mindkettőre alkalmazhatjuk az indukciós feltevést. Vagyis, mivel H^+-ban a maximális antilánc mérete a (több nem lehet és tartalmazza A-t, tehát ekkora van is) ezért felbontható a darab láncra. Ezek közül mindegyik pontosan egy elemét tartalmazza A-nak. Tehát legyen $H^+ = L_1^+ \cup L_2^+ \cup \dots \cup L_a^+$, ahol minden $1 \le i \le a$-ra L_i^+ egy lánc és $z_i \in L_i^+$. Ekkor z_i az L_i^+ minimális eleme.

Hasonlóan, $H^- = L_1^- \cup L_2^- \cup \dots \cup L_a^-$, ahol minden $1 \le i \le a$-ra L_i^- egy lánc és $z_i \in L_i^-$. Ekkor z_i az L_i^- maximális eleme.

Vegül pedig minden $1 \le i \le a$-ra legyen $L_i = L_i^+ \cup L_i^-$. Ekkor minden L_i egy lánc, és $H = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_a$. Ezzel beláttuk a Dilworth tételt.