Kombinatorika és gráfelmélet I
2. ZH, 2011. nov. 21. 14.15-15.45, STFKIS
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{50}$. A v_i és v_j pontok össze vannak kötve éllel akkor és csak akkor, ha $|i-j| \leq 2$, vagy $|i-j| = 9$. Határozzuk meg G pont-összefüggőségi számát.

Hagyjuk el a v_k és v_l ($k > l$) csúcsokat a gráfból. Először tegyük fel, hogy nem egymás mellett vannak, vagyis $k > l+1$. Tekintsük a megmaradt 98 csúcsot az indexe szerint növekvő sorrendben. Legyen v_i és v_j két egymást követő csúcs, $i > j$. Mivel az elhagyott csúcsok nem egymás mellett voltak, $i = j+1$ vagy $i = j+2$, tehát fut köztük él. Ezért a megmaradt gráf összefüggő. (Sőt, van Hamilton útja.) 3 pont

Most tegyük fel, hogy az elhagyott v_k és v_l csúcsokra $k = l+1$. Ekkor a $v_1, \ldots, v_{l-1}$, illetve a $v_{k+1}, \ldots, v_{50}$ csúcsok összefüggő részgráfot feszítenek, es összeköti őket például a $v_{k-8}v_{k+1}$ él, illetve ha $k \leq 8$, akkor a $v_{k-2}v_{k+7}$ él. Tehát G 3-összefüggő. 3 pont

Most hagyjuk el a v_2, v_3, és v_{10} csúcsokat, ezzel v_1–et elvágtuk a többitől. 3 pont

Tehát G pont-összefüggőségi száma 3. 1 pont

2. Mennyi az 1. feladatban szereplő gráf kromatikus száma?

Bármely három egymás utáni csúcs egy teljes hármast (háromszöget) feszít, ezért $\chi(G) \geq 3$. 3 pont

Most próbáljuk meg kiszínezni a p, k, z színekkel. Feltehetjük, hogy v_1 piros, v_2 kék, v_3 zöld. Ekkor, a teljes hármasok miatt, v_4 csak piros lehet, v_5 csak kék, v_6 zöld, v_7 piros, v_8 kék, v_9 zöld, v_{10} piros. Csakhogy v_1 és v_{10} össze vannak kötve! Tehát $\chi(G) \geq 4$. 4 pont

Négy színnel könnyű kiszínezni, például periodikusan: p, k, z, s, p, k, z, s, ... Ekkor az egyszínű csúcsok távolsága osztható 4-gyel, azok viszont G–ben nincsenek összekötve. 3 pont

3. Legyen G olyan gráf, amelyre $\nu(G) = 3$, és $\tau(G) = 5$.
a. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \geq 3$.
b. Mutassunk olyan G gráfot, amelyre $\nu(G) = 3$, $\tau(G) = 5$, és $\chi(G) = 3$.

a. A Kőnig tétel szerint páros gráfokra $\nu(G) = \tau(G)$, ami itt nem teljesül, tehát G nem páros, vagyis $\chi(G) \geq 3$. 5 pont
b. Jó példa két diszjunkt háromszög, és egy független él. (8 csúcsú gráf.) 5 pont

4. $G(A, B; E)$ egy páros gráf, bármely $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X|/3$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz legalább $|A|/3$ független élet.

Első megoldás: Legyenek A pontjai $a_1, \ldots, a_n$, B pontjai $b_1, \ldots, b_m$. Tekintsük a következő $G'(A', B'; E')$ páros gráfot: $A' = A$, B' pontjai $b'_1, \ldots, b'_m$, $b''_1, \ldots, b''_m$, és $b'''_1, \ldots, b'''_m$. Ha a_i és b_j össze voltak kötve G–ben, akkor kössük össze a_i–t b'_i–vel, b''_i–vel, és b'''_i–vel. (Magyarul: háromszorozzuk meg B pontjait.) 4 pont

G'–ben minden $X \subseteq A'$ esetén $|N(X)| \geq |X|$, tehát a Hall tétel szerint van A'–t fedő párosítás. 3 pont

A párosítás éleit kiszínezhetjük három színnel a következő módon. 1: a B'–beli vége valamilyen b'_j. 2: a B'–beli vége valamilyen b''_j. 3: a B'–beli vége valamilyen b'''_j. Valamelyik színosztályban legalább $|A|/3$ él van, az ezeknek megfelelő élek G–ben legalább $|A|/3$ független él. 3 pont

Második megoldás: Vegyünk hozzá B–hez $\lfloor 2|A|/3 \rfloor$ új csúcsot, és kössük össze őket A minden pontjával. 4 pont

A kapott G' páros gráfban teljesül a Hall feltétel, mert $X \subseteq A$–ra $|N_{G'}(X)| = |N_G(X)| + \lfloor 2|A|/3 \rfloor \geq |X|$. 3 pont

Tehát G' tartalmaz A–t lefedő párosítást, ebből legfeljebb $\lfloor 2|A|/3 \rfloor$ az „új" él, ezeket elhagyva még mindig marad legalább $|A|/3$ független él. 3 pont

Harmadik megoldás: Képezzünk A pontjaiból hármas csoportokat. Ha $|A|$ nem osztható hárommal, akkor egy csoport legyen 1 vagy 2 elemű. Húzzuk össze minden csoportban a pontokat, és kössük össze az eredeti három (vagy kivételes esetben 2 vagy 1) pont összes szomszédjával. 4 pont

A kapott $G'(A', B; E')$ páros gráfban teljesül a Hall feltétel, mert $X' \subseteq A'$–re $|N_{G'}(X')| = |N_G(X)| \geq \lceil |X|/3 \rceil \geq |X|$. ($X \subseteq A$ az $X' \subseteq A'$ pontjainak megfelelő pontok halmaza.) 3 pont

Tehát G' tartalmaz A'–t lefedő párosítást, ez pedig legalább $|A|/3$ független élnek felel meg G–ben. 3 pont

5. Legyenek G csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 8$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha

$$|i - k| + |j - l| = 1.$$

Határozzuk meg G él-összefüggőségi számát.

A gráf egy 8×8–as négyzetrács. A $v_{1,1}$ csúcsnak (ez felel meg a saroknak) csak két szomszédja van, $v_{1,2}$ és $v_{2,1}$. Ezért két él elhagyásával le tudjuk vágni. Tehát legfeljebb 2–élösszefüggő. 5 pont

Ugyanakkor bármely két csúcs között vezet két éldiszjunkt út. (Ha nem egy sorban és nem egy oszlopban vannak, akkor pl. mehetunk először vízszintesen, aztán függőlegesen, illetve először függőlegesen, aztán vízszintesen, ha egy sorban vannak, akkor csak vízszintesen, vagy függőlegesen–vízszintesen–függőlegesen, és hasonlóan ha egy oszlopban vannak.) Tehát az él-összefüggőségi szám 2. 5 pont

6. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{35}$. A v_i és v_j csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $i \cdot j$ osztható 4-gyel. Határozzuk meg $\rho(G)$ értékét.

Legyen $A = \{v_i | i \text{ osztható 4–gyel}\}$, $B = \{v_i | i \text{ páros, de nem osztható 4–gyel}\}$, $C = \{v_i | i \text{ páratlan}\}$. Ekkor $|A| = 8$, $|B| = 9$, $|C| = 18$. A csúcsai mindenkivel össze vannak kötve, ezenkívül B csúcsai egymással. 3 pont

Tehát C minden csúcsának a lefogásához különböző élre van szükség. Viszont ezekkel könnyedén lefoghatjuk az A–hoz tartozó csúcsokat. Ez eddig 18 él. 3 pont

Le kell még fognunk a B-hez tartozó 9 csúcsot, ehhez 5 él kell, ennyivel viszont simán megy. 3 pont

Tehát $\rho(G) = 23$. 1 pont