Kombinatorika és gráfelmélet I

1. ZH, 2011. okt. 17. 14.15-15.45, STFKIS

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Legyen $1 < k < n$. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_n$, bármely $1 \le i < j \le n$ esetén v_i és v_j össze van kötve akkor és csak akkor, ha $k < j$. Határozzuk meg, hogy milyen n, k párokra lesz G–ben Hamilton út!

Legyen n páros. Ha $k \le n/2$, akkor a $v_1 v_n v_2 v_{n-1} v_3 \cdots v_{n-k+2} v_k$ út, kiegészítve a megmaradó $v_{k+1}, \dots, v_{n-k+1}$ csúcsokon át vezető úttal, egy Hamilton utat ad. 2 pont

Ha viszont $k \ge n/2 + 1$, akkor $k \ge n - k + 2$. Hagyjuk el a gráfból a $v_{k+1}, \dots, v_n$ csúcsokat, a megmaradó $v_1 \dots, v_k$ csúcsok között nem vezet él. Így $n - k$ csúcs elhagyásával $k \ge n - k + 2$ komponensre esett szét a gráf, ami azt jelenti, hogy nem tartalmaz Hamilton utat. 2 pont

Most tegyük fel, hogy n páratlan. Ha $k \le (n + 1)/2$, akkor a $v_1 v_n v_2 v_{n-1} v_3 \cdots v_{n-k+2} v_k$ út, kiegészítve az esetlegesen megmaradó $v_{k+1}, \dots, v_{n-k+1}$ csúcsokon át vezető úttal, egy Hamilton utat ad. 2 pont

Ha viszont $k \ge (n + 3)/2$, akkor $k \ge n - k + 3$. Hagyjuk el a gráfból a $v_{k+1}, \dots, v_n$ csúcsokat, a megmaradó $v_1 \dots, v_k$ csúcsok között nem vezet él. Így $n - k$ csúcs elhagyásával $k \ge n - k + 3$ komponensre esett szét a gráf, ami azt jelenti, hogy nem tartalmaz Hamilton utat. 2 pont

Összefoglalva, akkor és csak akkor van Hamilton út, ha $k \le \lceil n/2 \rceil$. 2 pont

2. A teljes gráf éleit úgy súlyoztuk meg, hogy minden csillag (egy csúcsból induló összes él) egy minimális összsúlyú feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy az összes élnek ugyanaz a súlya.

Először bebizonyítjuk, hogy bármely két, egy csúcsból induló élnek egyforma a súlya. Tegyük fel, hogy $s(uv) > s(vw)$. Vegyük az u középpontú csillagot, ami a feltétel szerint egy minimális összsúlyú feszítőfa. Cseréljük ki az uv élet a vw élre. A kapott gráf már nem csillag, viszont feszítőfa, és kevesebb a súlya, mint a csillagnak, ami ellentmondás. Tehát bármely két, egy csúcsból induló élnek egyforma a súlya. 8 pont

Most vegyünk két élet, amelyeknek nincs közös végpontja, mondjuk uv és wz Ekkor a fentiek alapján mindkettőnek annyi a súlya, mint az uw élnek, tehat egyforma a súlyuk. Így az összes élnek ugyanaz a súlya. 2 pont

3. A 100 csúcsú G gráf egy K_{10} (teljes 10 csúcsú gráf) és egy K_{90} (teljes 90 csúcsú gráf) diszjunkt uniója. Minimálisan hány élt kell behúzni, hogy a kapott gráf egyszerű legyen, és legyen Euler köre?

Ahhoz, hogy legyen Euler kör, minden fokszámnak párosnak kell lenni. Jelenleg mind a száz fokszám páratlan. A K_{90}-ben szereplő 90 páratlan fokú csúcs közé nem húzhatunk ujabb élet, mert már bármely kettő össze van kötve. 4 pont

Tehát mind a 90 csúcshoz különböző élet kell húzni, vagyis legalább 90 élre van szükség. 3 pont

Ennyi viszont elég is. Legyenek a K_{10} csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_{10}$, a K_{90} csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{90}$. Húzzuk be az $u_1 v_1$, $u_2 v_2$, $\dots$, $u_{10} v_{10}$ éleket, és az $u_1 v_{11}, u_1 v_{12}, \dots, u_1 v_{90}$ éleket. A kapott gráf egyszerű, 1 pont

és összefüggő, 1 pont

minden fok páros, tehát van Euler köre. 1 pont

4. Egy 30 csúcsú egyszerű gráf két csúcsának a foka 10, a többié 20. Bizonyítsuk be, hogy tartalmaz Hamilton utat.

1. Megoldás. Ha a két 10 fokú csúcs össze van kötve, akkor teljesül az Ore feltétel, így van Hamilton kör, vagyis Hamilton út is van. 5 pont

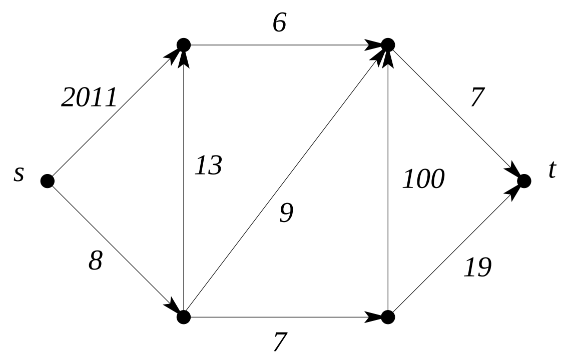
Ha nincsenek összekötve, akkor viszont kössük őket össze. A kapott gráfban teljesül az Ore feltétel, így van Hamilton kör, elhagyva az extra élet még maradnia kell egy Hamilton útnak. 5 pont

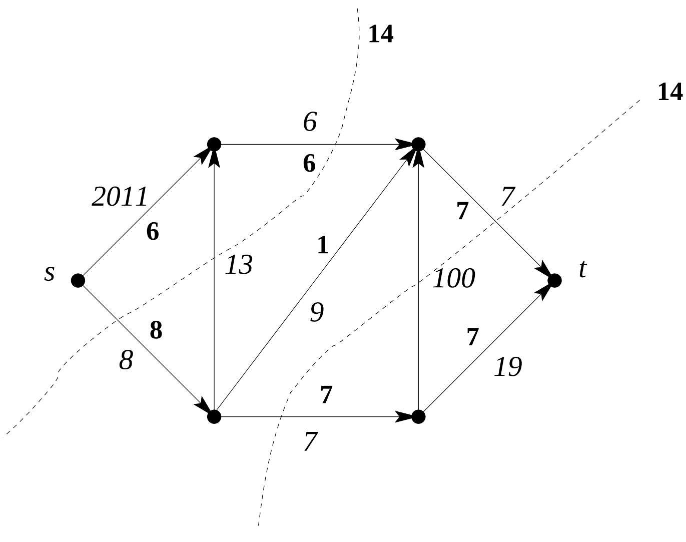
2. Megoldás. Teljesül a Pósa illetve a Chvátal feltétel, így van Hamilton kör, vagyis Hamilton út is van. 10 pont

5. a. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága 14.

b. El lehet érni egyetlen él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 13 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)

c. El lehet érni egyetlen él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 15 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)





a. A második ábrán látható egy 14 értékű folyam, és egy (sőt! kettő!) 14 kapacitású vágás. 4 pont

b. A 6, 8, vagy valamelyik 7 kapacitású él kapacitását eggyel csökkentve kapunk egy 13 értékű vágast. Mivel semelyik vágas ertéke sem csökkenhetett több mint eggyel, most 13 a legkisebb vágás kapacitása. Tehat a maximális folyam értéke is 13. 3 pont

c. Az ábrán látható két 14 értékű vágas. Egy él kapacitásának a megváltoztatásával legfeljebb az egyik vágas változhat, így maradni fog egy 14 kapacitású vágás. Tehat itt a válasz NEM. 3 pont

6. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ és $u_{i,j}$, $1 \le i < j \le 10$. (Tehát G–nek összesen 55 csúcsa van.) Minden $u_{i,j}$ csúcs össze van kötve a v_i és v_j csúcsokkal. Más él nincs. Hány feszítőfa található G–ben?

Vegyünk egy teljes gráfot a $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ csúcsokon, és tekintsünk egy tetszőleges F feszítőfáját. Ennek 9 éle van, és 36 csúcspár nincs összekötve. Ehhez hozzárendelhetunk 2^{36} darab feszítőfát G–ben a következő módon. Ha F–ben v_i és v_j össze van kötve, akkor vegyük az $u_{i,j}v_i$ és az $u_{i,j}v_j$ éleket. Ha v_i és v_j nincs összekötve, akkor meg vegyük vagy csak az $u_{i,j}v_i$ vagy csak az $u_{i,j}v_j$ élet. Így 2^{36} darab feszítőfát kaptunk G–ben. 3 pont

Most bebizonyítjuk, hogy G összes feszítőfáját pontosan egyszer kaptuk meg. Nyilván egy adott F–hez csupa különböző feszítőfát rendeltünk. 1 pont

Tekintsük G egy feszítőfáját, $\bar{F}$–et. Minden $1 \le i < j \le 10$ számpárra, ha $u_{i,j}$ foka 2, akkor hagyjuk el az $u_{i,j}$ csúcsot, és kössuk össze a v_i és v_j csúcsokat. Ha pedig $u_{i,j}$ foka 1, akkor hagyjuk el az $u_{i,j}$ csúcsot. Ezekkel a lépésekkel nem csináltunk kört, és nem rontottuk el az összefüggőséget, tehát a végén $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ csúcsokon levő teljes gráf egy F feszítőfáját kaptuk, és az F–hez rendelt 2^{36} darab feszítőfa egyike éppen $\bar{F}$. 3 pont

Mivel a $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ csúcsokon 10^8 darab feszítőfa van, G–nek $2^{36}10^8$ feszítőfája van. 3 pont