Kombinatorika és gráfelmélet 1.

9. gyakorlat, 2011. november 4.

Hall-tétel, Kőnig tétel

Tudnivalók:

(Felső becslés a holnapi előadás tervezett anyagára)

$G(A, B; E)$ **páros gráf**, ha A és B a csúcsok, E az élek halmaza, és minden él A és B között fut.

Legyen G egy tetszőleges gráf.

Az $F \subseteq E(G)$ élhalmaz **független**, (vagy **párosítás**), ha F éleinek nincs közös végpontja. Az F élhalmaz **lefogó**, ha G minden pontja F valamelyik élének végpontja. Az $U \subseteq V(G)$ ponthalmaz **független**, ha nem feszít élt, míg U akkor **lefogó ponthalmaz**, ha G minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

Tetszőleges $X \subseteq V(G)$ csúcshalmazra $\boldsymbol{N(X)}$ jelöli X szomszédainak a halmazát, vagyis azon csúcsokat, amelyeknek van X–beli szomszédja.

Frobenius tétel: Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ páros gráf. Pontosan akkor van G–ben teljes (azaz minden csúcsot fedő) párosítás, ha $|A| = |B|$, és minden $X \subset A$–ra $|X| \leq |N(X)|$.

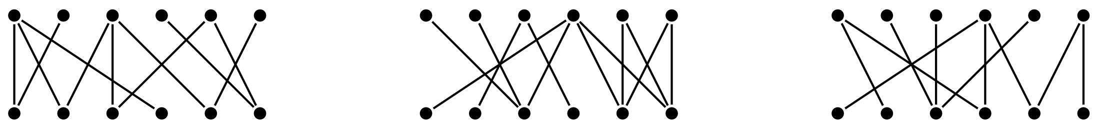
Hall tétel: Tegyük fel, hogy $G = (A, B; E)$ páros gráf. Pontosan akkor van G–ben A–t lefedő párosítás, ha minden $X \subset A$–ra $|X| \leq |N(X)|$.

Kőnig tétel: Ha G páros gráf akkor $\nu(G) = \tau(G)$, továbbá $\alpha(G) = \rho(G)$, ha G–ben izolált pont sincs.

Gallai tétel: (a) Ha G–ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|$.
(b) Ha G–ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$.

Feladatok:

1. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



2. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G-nek van A-t fedő párosítása.
4. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?
5. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
6. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)
7. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
8. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.
9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!

Házi feladat

1. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.