Kombinatorika és gráfelmélet 1.

5. gyakorlat, 2011. október 7.

Hamilton-kör, Hamilton-út

1. (a) Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8-as), (c) 3×5-ös, (d) 3×6-os sakktábla esetén?

2. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G-nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G-nek.

3. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.

5. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.

6. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.

7. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!

8. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Hamilton-köre?

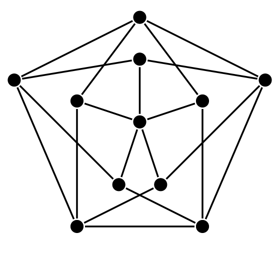
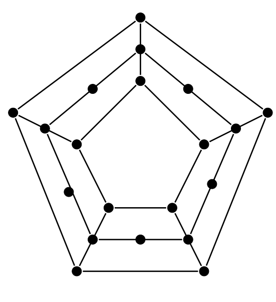
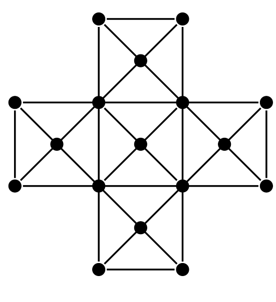
9. Bizonyítsuk be, hogy ha n egynél nagyobb páratlan szám, akkor $L(K_n)$-nek, az n pontú teljes gráf élgráfjának van Hamilton-köre.

10. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \ldots 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?

11. Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.

12. Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
(a) G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
(b) G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x, y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;
(c) G_n a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfot jelöli és $n \geq 2$.

13. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?

14. Tartalmaz-e Hamilton-kört a $KG(6,3)$, illetve a $KG(16,3)$ Kneser-gráf?

15. Van-e olyan 6 csúcsú és 11, illetve 12 élű egyszerű gráf, amelyben nincs Hamilton-kör?

16. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?

Házi feladatok

1. Legalább hány élét kell elhagyni a K_n n csúcsú teljes gráfnak, hogy ne legyen a maradék gráfban Hamilton kör?

2. Mutassunk példát olyan 3-reguláris összefüggő egyszerű gráfra, amiben nincs Hamilton-út!