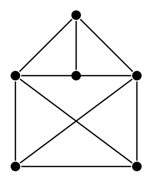
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

4. gyakorlat, 2011. szeptember 30.

Minimális súlyú feszítőfa, Euler-kör és -út

1. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
2. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok, és legyen a $v_i v_j$ él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.
3. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.
4. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.
5. Bizonyítsuk be, hogy egy *irányított* gráfnak (amelynek nincs izolált pontja) akkor és csak akkor van irányított Euler köre, ha minden pont be–foka egyenlő a ki–fokával, és gráf, mint irányítatlan gráf, összefüggő.
6. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-köre?
7. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler-köre, akkor G csúcsainak bármely részhalmazából páros sok él indul a komplementerébe.
8. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve Euler-utat?
9. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler-köre, akkor G élgráfjának, $L(G)$-nek is van Euler-köre!

   (A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek van közös végpontjuk.)
10. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
11. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.
12. Mi a pontos feltétele annak, hogy egy gráf „vaktában bejárható” legyen, azaz létezzen benne olyan pont, ahonnan indított nem folytatható séta csak Euler-kör lehet?
13. A G gráfnak e és f két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá G-ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy G-ben olyan Euler-kör is van, melyben e és f egymást követik?
14. Minimálisan hányszor kell felemelni a ceruzánkat, hogy lerajzoljuk az alábbi gráfot úgy, hogy minden élt pontosan egyszer rajzolunk le és másik élre csak a gráf csúcsainál válthatunk?



15. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)

16. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
    (a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
    (b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
    (c) Ha G-ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
    (d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G-ben is van.

Házi feladatok

1. Hogyan súlyozzuk egy n csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy a súlyok összege 1, és a minimális feszítőfa súlya a lehető legnagyobb?

   Mennyi az így kapott minimális feszítőfa súlya?

2. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig olyan 1-reguláris részgráfja, mely az eredeti gráf összes pontját tartalmazza?

   (Egy gráfot k-*regulárisnak* nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k.)