Kombinatorika és gráfelmélet 1.

12. gyakorlat, 2011. december 3.

Kromatikus szám, csúcsszínezés, élszínezés, listaszínezés

1. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
2. Van-e olyan G gráf, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?
3. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$ (ill. $\chi(G) \leq 3$)?
4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésének bármely színosztályának van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.
5. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.
6. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyre valamelyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?
7. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
8. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
9. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
10. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül.
    Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)
11. Ha az n-csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, akkor legalább $2n - 3$ éle van. (*)
12. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.
13. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.
14. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.
15. A Mycielski konstrukcióval megkapott G_k gráfok közül melyek tartalmaznak Euler körsétát, és melyeknek van Hamilton körük?
16. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r-reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.
17. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
18. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.

19. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.

20. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfja komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?
(A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek van közös végpontjuk.)

21. Határozzuk meg $ch(K_{2,4})$ értékét. ($K_{2,4}$ a két színosztályában 2 és 4 pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)

22. Igaz-e, hogy ha $\chi(G) = ch(G)$, akkor $\chi(\overline{G}) = ch(\overline{G})$?

23. Igaz-e, hogy ha a G gráf minden csúcsához adott egy legalább $ch(G)$ méretű színlista, akkor G alkalmas csúcssorrend esetén mohón kiszínezhető úgy, hogy minden csúcsnak a listáján szereplő legkisebb olyan színt választjuk, ami nem azonos az eddig megszínezett, az adott csúccsal szomszédos csúcsok valamelyikének színével?

24. Legyen $K_{2,2,\ldots,2}$ az a gráf, aminek komplementere n diszjunkt él. Határozzuk meg a $ch\left(K_{2,2,\ldots,2}\right)$ listaszínezési számot.

25. Mutassunk olyan gráfot, ami egyetlen gráfnak sem élgráfja.

26. Mutassuk meg, hogy ha G élgráf, akkor $ch(G) \leq 2\chi(G) - 1$.

27. Igazoljuk, hogy ha a véges, egyszerű G gráf minden v csúcsára $|L(v)| > d(v)$ teljesül, akkor G L-listaszínezhető. ($d(v)$ jelöli a v csúcs fokszámát.)

28. Mutassuk meg, hogy tetszőleges T legalább két pontú fára $ch(T) = 2$.

29. Bizonyítsuk be, hogy $ch(K_{n,n^n}) = n + 1$ minden pozitív egész n-re. (K_{n,n^n} a két színosztályában n és n^n pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)

30. Jelölje $\chi''(G)$ a G gráf teljes kromatikus számát, azaz a minimális színszámot, ami szükséges érvényes teljes színezéshez úgy, hogy a csúcsokat és az éleket is színezzük, azzal a feltétellel, hogy érintkező elemek (összekötött csúcsok, közös csúccsal rendelkező élek, egy él és annak egy végpontja) nem lehetnek azonos színűek. Igazoljuk, hogy a listaszínezési sejtésből következne, hogy $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$ minden G gráfra.