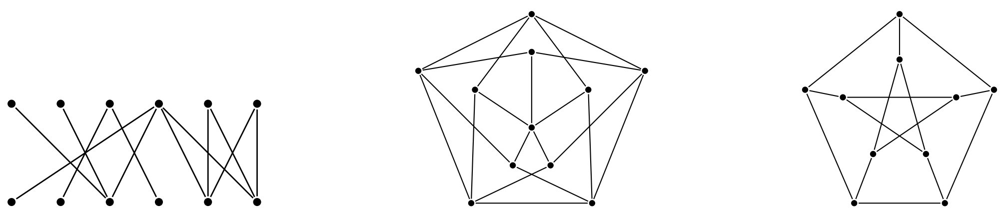
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

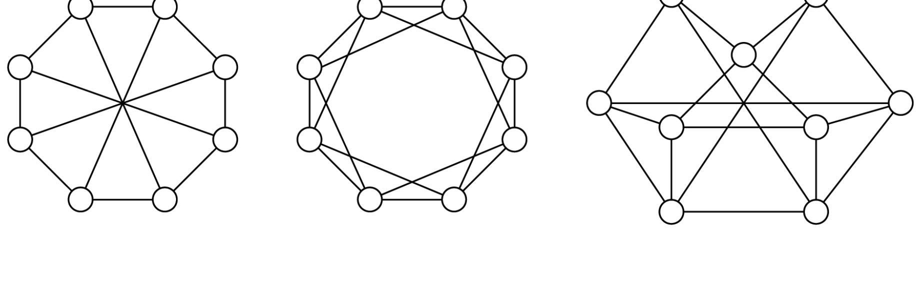
11. gyakorlat, 2010. november 11.

Párosítások páros, ill. tetszőleges gráfban; Görög betűk, kromatikus szám

1. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan k db különböző teljes párosítása van.
2. Mutassuk meg, hogy ha G olyan $(n-1)$-öf, $2n$ csúcsú gráf, amire $\tau(G) \geq n$, akkor G-nek van teljes párosítása.
3. Igaz-e, hogy tetszőleges véges G gráf mindazon élei, amik G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?
4. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
5. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
6. Egy ünnep alkalmával török szultán udvarában a férfiak két-két háremhölgyet választanak. Minden férfinek legalább 2 háremhölgy tetszik. Mi a feltétele annak, hogy minden férfi neki tetsző két háremhölggyel tölthesse az éjszakát?
7. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



8. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg a gráfra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékét.
9. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$ értékét!
10. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n-1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?
11. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.
12. Határozzuk meg a mellékelt gráfok kromatikus számát!



13. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \ldots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
14. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
15. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
16. Igazoljuk, hogy a Kneser gráf kromatikus száma $\chi(KG(n,k)) \leq n - 2k + 2$. (A $KG(n,k)$ Kneser gráf csúcsai egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak felelnek meg (tehát $|V| = \binom{n}{k}$), és két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak.)
17. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
18. Van-e olyan G gráf, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?
19. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$ (ill. $\chi(G) \leq 3$)?
20. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésének bármely színosztályának van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.
21. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.
22. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyre valamelyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?
23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
24. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
25. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
26. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül.
    Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)
27. Ha az n-csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, akkor legalább $2n - 3$ éle van. (*)
28. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.
29. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.
30. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.

Házi feladatok

1. Legyen G egy gráf, aminek mindegyik csúcsában ül egy béka. Gongütésre mindegyik béka egy, az általa elfoglalt csúccsal szomszédos csúcsba ugrik. Bizonyítsuk be, hogy a békák pontosan akkor tudnak egyszerre úgy ugrani, hogy a gongütés után is G minden csúcsában pontosan egy béka legyen, ha a G gráf csúcsainak bármely X részhalmazára az teljesül, hogy X G-ből való elhagyása után legfeljebb $|X|$ izolált pont keletkezik. (*)