

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

1. gyakorlat, 2011. szeptember 9.

Elemi leszámítások, szita-formula

- (a) A cirkusz porondjára 3 tigris, 4 oroszlán és 2 párduc vonul be libasorban. Hányféle lehet a sorrend, ha az azonos fajú állatokat nem tudjuk megkülönböztetni?
 - (b) Egy versenyen 22-en indulnak; az újságok az első nyolc helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?
 - (c) A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. A biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?
 - (d) Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatoslottó szelvényt? Hány szelvény szükséges a totón a legalább öt találatához (a tizenháromból)?
- Hányféleképpen állhat sorba n fiú és n lány úgy, hogy azonos neműek ne álljanak egymás mellett?
- Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?
- (a) Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt?
 - (b) És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?
 - (c) Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?
 - (d) Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben szerepel az 5-ös számjegy? (Egy szám nem kezdődhet 0-val).
- Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország léteztetett atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?
- Egy 99 elemű halmaznak páros vagy páratlan elemszámú részhalmazából van-e több? Hát egy 100-elemű halmaznak?
- Feldobunk tíz egyforma dobókockát. Hányféle lehet az eredmény?
- Minimálisan hány töréssel lehet egy 4×5 -ös csokitáblát egyes kockákra tördelni?
- Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (Mik a válaszok futókra?(*))
- Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív egész n számra $\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$.
- Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
- Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?
- Hányféleképpen lehet az alábbi táblázatból kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K		T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

14. Nyolc ember szeretne teniszezni három teniszpályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyéniit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két tételét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőeknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)
15. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra?
16. Egy moziban n széksor van, az egyes sorokban k_1, k_2, \dots, k_n szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben m embert? Hát egy k székből álló sorba hányféleképp ülhet le l házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?
17. Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma?
18. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezét fognak (a nők is). Természetesen senki sem fog kezét a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogtak kezét, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezét Kovácsné? (*)
19. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $\phi(n) = n \prod_{p|n, p \text{ prím}} (1 - \frac{1}{p})$ az n -nél kisebb, n -hez relatív prím pozitív egészek száma.
20. Igazoljuk, hogy 2008 tetszőlegesen megadott egész számból kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük 2008 többszöröse legyen.
21. Mennyi n elem fixpont nélküli permutációinak száma? (Azaz az olyan permutációk száma érdekel bennünket, melyben semmilyen $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ elemre sem teljesül, hogy éppen az i . helyen állna.) Ha ez az érték $f(n)$, akkor mennyi az $f(n)/n!$ arány limesze, ha n tart végtelenhez?
22. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.
23. Hány olyan k elemű részhalmaza van n körberakott pontnak, ami nem tartalmaz szomszédos pontokat? (*)
24. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója halad át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében? (*)
25. Az amerikai biliárd 15 számozott golyójának egy bizonyos játéknál olyan sorrendben kell a biliárdasztal lyukaiba gurulnia, mely teljesíti az alábbiakat.
Az elsőként leguruló golyó tetszőleges. Minden $k \geq 1$ -re igaz, hogy az első k legurult golyó sorszámából álló halmaz k egymást követő pozitív egész szám halmaza. Hány különböző érvényes legurulási sorrendje van a 15 golyónak?
26. A 65 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni a kombi előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnytóra, néhánynak (legalább egynek) meg a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?
27. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell „venniük” a vasboltban, hogy ezt megtehessek? (*)

Házi feladatok

1. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba $2n$ különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?
2. 70 tolmács közül bármely kettőre igaz, hogy mindketten ismernek olyan nyelvet, amit a másik nem. Összesen legalább hány nyelvet beszélnek? (*)