Kombinatorika és gráfelmélet I

Második PÓTPÓTZH, 2010. dec. 14. 8.15-9.45, QBF12

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. A G gráf csúcsai $v(i,j)$, $1 \leq i \leq 10$, $1 \leq j \leq 100$. A $v(i,j)$ és $v(i',j')$ különböző csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|j-j'| \leq 1$ vagy $j=1$ és $j'=100$. (Vagyis veszünk egy 100 hosszú kört, és minden pontját helyettesítjük egy teljes 10 csúcsú gráffal, az eredeti éleket meg 100-100 éllel.) Határozzuk meg G pont-összefüggőségi számát.

2. A H gráf csúcsai $v(i,j)$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 5$. A $v(i,j)$ és $v(i',j')$ különböző csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|j-j'| \leq 1$ vagy $j=1$ és $j'=5$. (Vagyis veszünk egy 5 hosszú kört, és minden pontját helyettesítjük két összekötött csúccsal, az éleket meg 4-4 éllel.) Bizonyítsuk be, hogy $\chi(H)=5$.

3. Tekintsük az összes olyan G 100 csúcsú *páros* gráfot, amelyeknél a lefogó pontok minimális száma $\tau=3$. Mennyi az élek számának maximuma, illetve minimuma?

4. Határozzuk meg az összes olyan G 50 csúcsú gráfot, amely 3-élösszefüggő, $\tau(G)=3$, $\chi(G)=3$.

5. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, A csúcsai $a_1,\ldots,a_n$, B csúcsai $b_1,\ldots,b_m$. Tudjuk, hogy minden i-re, a_i foka legalább i, és b_i foka is legalább i. Bizonítsuk be, hogy G tartalmaz teljes párosítást.

6. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{39}$, a v_i és v_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve éllel, ha $i+j$ osztható 7-tel. Határozzuk meg $\rho(G)$ értékét.

($\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\chi(G)$: kromatikus szám)