Kombinatorika és gráfelmélet I

Második PótZH, 2010. dec. 10. 12.15-13.45, H405/A

Javítókulcs

1. A G gráf csúcsai a sakktábla mezői, két csúcs akkor és csak akkor van összekötve éllel, ha a megfelelő mezők ugyanabban az oszlopban, vagy szomszédos oszlopban vannak. (Formálisabban: G csúcsai $v(o,s)$, $1 \le o,s \le 8$, a $v(o,s)$, $v(o',s')$ különböző csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|o-o'| \le 1$.) Határozzuk meg G pont-összefüggőségi számát.

Ha elhagyunk egy nem-szélső oszlopot (illetve az annak megfelelő csúcsokat) akkor a gráf szétesik két komponensre, az elhagyott oszloptól jobbra és balra levő csúcsokra. 4 pont

Tehát az összefüggőségi szám legfeljebb 8. 1 pont

Hagyjunk most el 7 tetszőleges csúcsot. Ekkor minden oszlopban marad legalább egy csúcs. Ezek köszül a szomszédos, illetve azonos oszlopban levők össze vannak kötve, a gráf összefüggő maradt. 4 pont

Tehát az összefüggőségi szám 8. 1 pont

2. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő gráf kromatikus számát.

Két szomszédos oszlopban levő csúcsok egy teljes 16 csúcsú részgráfot alkotnak. 3 pont

Tehát legalább 16 színre szükség van. ($\chi(G) \ge \omega(G) \ge 16$) 2 pont

Viszont 16 színnel könnyű kiszínezni, színezzük az első oszlop csúcsait 8 színnel, a második oszlop csúcsait másik 8 színnel, a harmadikét az első 8 színnel, és így tovább. (Vagyis a páros sorszámú oszlopok színezéséhez használjuk az $1, 2, \ldots, 8$ színeket, a páratlan sorszámúakhoz a $9, 10, \ldots, 16$ színeket.) 4 pont

Tehát $\chi(G) = 16$. 1 pont

3. Tekintsük az összes olyan G 100 csúcsú gráfot, amelyeknél a lefogó pontok minimális száma $\tau = 3$. Mennyi az élek számának maximuma, illetve minimuma?

Minimum: ha a gráfnak csak két éle van, akkor lefoghatók 2 ponttal. Tehát legalább 3 éle van. 2 pont

3 éle viszont lehet is, mert vegyünk egy olyan 100 csúcsú gráfot, amelynek összesen 3 független éle van, semmi más, ekkor $\tau = 3$. Tehát a minimum 3. 3 pont

Maximum: Feltehetjük, hogy a három lefogó pont a v_1, v_2, v_3. Vegyük be a gráfba az összes olyan élet, amit ezek lefognak, vagyis az egyik végpontjuk v_1, v_2, vagy v_3. 3 pont

Ez összesen 3 él, amelyek v_1, v_2, v_3 között futnak, és még $3 \cdot 97$, amelyek a v_1, v_2, v_3 csúcsokat a többi 97 csúccsal kötik össze. Tehát a válasz $3 + 3 \cdot 97 = 294$ 2 pont

4. Határozzuk meg az összes olyan G gráfot, amely 2-élösszefüggő, $\tau(G) = 2$, $\alpha(G) = 10$, $\chi(G) = 3$.

Tudjuk, (Gallai tétel) hogy $\tau(G) + \alpha(G) = n$, tehát G-nek 12 csúcsa van, mondjuk $v_1, v_2, \ldots, v_{12}$. 2 pont

Tegyük fel, hogy v_1 és v_2 egy lefogó ponthalmazt alkot. Ekkor a többi 10 csúcs között nem futhat él, vagyis függetlenek. 1 pont

Ha a két lefogó pont, v_1 és v_2 nem lennének összekötve, akkor két színnel ki lehetne színezni a gráfot: egy szín v_1-nek és v_2-nek, és egy szín a többinek. 1 pont

Tehát v_1 és v_2 össze vannak kötve. 1 pont

Mivel G 2-összefüggő, minden csúcs fokszáma legalább 2. 2 pont

Ezért az összes v_1-től és v_2-től különböző csúcs össze van kötve v_1-gyel és v_2-vel is, mivel egymással nem lehetnek összekötve. 2 pont

Tehát csak egy ilyen gráf van, v_1 és v_2 minden más csúccsal össze vannak kötve, más él nincs. 1 pont

5. G egy páros gráf, A és B osztályokkal. A-ban minden pont foka 40, B-ben 30.

a. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz A-t lefedő párosítást.

b. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 10 éldiszjunkt A-t lefedő párosítást.

a. Ellenőrizzük a Hall feltételt. 1 pont

Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges, és E az X és $N(X)$ között futó élek halmaza. Ekkor $|E| = 40|X|$ mivel X-ben minden csúcs foka 40. 2 pont

Viszont $|E| \leq 30|N(X)|$, mert minden $N(X)$-beli csúcs foka 30, és nem is biztos hogy a belőlük kifutó élek mind E-ben vannak. 2 pont

Tehát $40|X| \leq 30|N(X)|$, ebből következik hogy $|X| \leq |N(X)|$, teljesül a Hall feltétel, van A-t lefedő párosítás. 2 pont

b. Most hagyjuk el ezt a párosítást, ekkor A-ban minden csúcs foka 39, B-ben pedig legfeljebb 30. 1 pont
Megint ellenőrizzük a Hall feltételt, a fenti számolás így módosul: $39|X| \leq 30|N(X)|$, ebből tovabbra is következik, hogy $|X| \leq |N(X)|$, tehát még mindig van A-t lefedő párosítás. 2 pont

Ezt megismételhetjük összesen 10-szer. A k-adik párosítás elhagyása után ($k \leq 9$) a számolás: $(40-k)|X| \leq 30|N(X)|$, ebből következik, hogy $|X| \leq |N(X)|$, tehát még mindig van egy $k+1$-edik A-t lefedő párosítás. 1 pont

(Megjegyzés: igazából $k = 10$-re is működik a számolás, tehát 11 párosítás is van.)

6. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{40}$, a v_i és v_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve éllel, ha ij osztható 4-gyel. Adjunk meg egy maximális független élhalmazt G-ben. (És mutassuk meg róla, hogy tényleg egy maximális független élhalmaz.)

A gráf a következőképpen néz ki: a 20 db páros indexű csúcs teljes gráfot alkot, és ezek közül a 10 db 4-gyel osztható indexű a 20 db páratlan indexűvel is össze van kötve. Más él nincs. 2 pont

Tehát a 20 db páratlan indexű csúcs csak a 10 db 4-gyel osztható indexű csúccsal van összekötve. 2 pont

Ezért a páratlan indexű csúcsok közül legalább 10-et nem tudunk bepárosítani. Vagyis egy maximális párosításból kimarad legalább 10 páratlan indexű csúcs. 2 pont

Ennél többnek viszont nem is kell kimaradni: Párosítsuk össze a 10 4-gyel osztható indexű csúcsot 10 páratlan indexű csúccsal, és párosítsuk össze a 10 páros, de 4-gyel nem osztható indexű csúcsot egymással. 3 pont

Ez tehát egy maximális párosítás (független élhalmaz), 15 élből áll. 1 pont

($\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\chi(G)$: kromatikus szám)