Kombinatorika és gráfelmélet I
2. ZH, 2010. nov. 22. 10.15-11.45, E1C
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$. A v_i és v_j pontok össze van kötve éllel akkor és csak akkor ha $|i-j| < 6$. Határozzuk meg G pont-összefüggőségi számát.

Hagyjunk el négy csúcsot a gráfból, és tekintsük a megmaradt 96 csúcsot az indexe szerint növekvő sorrendben. Legyen v_i és v_j két egymást követő csúcs, $i > j$. Mivel csak négy csúcsot hagytunk el, $i - j \leq 5$, tehát fut köztük él. Ezért a megmaradt gráf összefüggő. (Sőt, van Hamilton útja.) 5 pont

Most hagyjunk el öt egymás utáni csúcsot, mondjuk a $v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}$ csúcsokat. Ekkor a 10-nél kisebb indexű és 14-nél nagyobb indexű csúcsok között nem fut él, a megmaradt gráf nem összefüggő. 4 pont

Tehát G pont-összefüggőségi száma 5. 1 pont

2. Tegyük fel, hogy $\nu(G) = 2$ és $\tau(G) = 4$. Bizonyítsuk be, hogy $3 \leq \chi(G) \leq 5$. ($\nu(G)$ a független élek maximális száma, $\tau(G)$ a lefogó pontok minimális száma, $\chi(G)$ a gráf kromatikus száma.)

A Kőnig tétel szerint minden páros H gráfra $\nu(H) = \tau(H)$. 2 pont

Mivel G-re $\nu(G) \neq \tau(G)$, G nem páros gráf, ezért $3 \leq \chi(G)$. 3 pont

Vegyünk 4 lefogó pontot G-ben. Mivel ezek lefogják az összes élt, a többi pont között nem fut él. 2 pont

Színezzük a 4 lefogó pontot 4 színnel, az összes többi pontot az ötödik színnel. 2 pont

Ez egy jó színezés, tehát $\chi(G) \leq 5$ 1 pont

Második rész másképp:

Tegyük fel, hogy $\chi(G) \geq 6$, és vegyük G egy színezését az $1, 2, \ldots, 6, \ldots, \chi(G)$ színekkel. Tudjuk, hogy bármely két i, j színt választva, van G-nek i, j színű éle (vagyis amelynek az egyik vége i, a másik vége j színű). Különben a j színű pontokat is színezhettük volna i színűre. 3 pont

Vegyünk egy $1, 2$, egy $3, 4$ és egy $5, 6$ színű élet. Ez három független él, ami ellentmond annak, hogy $\nu(G) = 2$. Tehát $\chi(G) \leq 5$. 2 pont

3. G egy páros gráf, A és B osztályokkal, és minden $X \subseteq A$ halmazra $N(X) \geq |X| - 1$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz olyan párosítást ami A-t egy pont kivételével lefedi.

Vegyünk fel egy új csúcsot a B osztályba, amelyet minden A-beli ponttal összekötünk. Legyen az új gráf G'. 3 pont

A G' gráfra teljesül, hogy minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$, hiszen, minden X halmaz szomszédsága eggyel nőtt.

2 pont

Tehát a Hall tétel alapján G' tartalmaz A-t lefedő párosítást. 2 pont

Ebből kihagyva az új csúcsot, egy G-ben levő olyan párosítást kapunk, ami A-t egy pont kivételével lefedi. 3 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy 3 páros gráf uniójának a kromatikus száma legfeljebb 8.

Legyen $G_i(A_i, B_i, E_i)$ az i-edik páros gráf, $i = 1, 2, 3$. Minden v csúcsnak megfeleltethetünk egy 3 hosszú A-kból és B-kből álló sorozatot, a következő módon. Az i-edik helyen A áll akkor és csak akkor, ha v A_i-ben van, B, ha B_i-ben van. 5 pont

Összesen $2^3 = 8$ féle ilyen sorozat van, tehát beosztottuk a csúcsokat 8 osztályba. 2 pont

Adjunk osztályonként különböző színt a csúcsoknak. Mivel egy osztályon belül nem fut él semelyik páros gráfban, így az uniójukban sem, ez egy jó színezés 8 színnel. 3 pont

Másik megoldás:

Egy páros gráf kromatikus száma legfeljebb 2. 1 pont

Tanultuk, hogy ha G_1 és G_2 két gráf ugyanazon a csúcshalmazon, akkor $\chi(G_1 \cup G_2) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$. 3 pont

Ebből azonnal adódik, hogy két páros gráf uniójának a kromatikus száma legfeljebb 4. 2 pont

Alkalmazzuk újra a tételt, erre a gráfra (amely két páros gráf uniója) és még egy páros gráfra. 3 pont

Azt kapjuk, hogy három páros gráf uniójának a kromatikus száma legfeljebb $4 \cdot 2 = 8$. 1 pont

5. G egy k-szorosan élösszefüggő egyszerű gráf, $k > 0$, G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $n > k$. Legyen G' gráf a következő. G' csúcsai $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $w_1, w_2, \ldots, w_n$, u_i és u_j illetve w_i és w_j össze vannak kötve G'-ben akkor és csak akkor ha v_i és v_j össze vannak kötve G-ben. Ezenkívül minden i-re $(1 \leq i \leq n)$ kössük össze u_i-t w_i-vel. Vagyis vesszük G két példányát, és a két példányban egymásnak megfelelő csúcsokat összekötjük.

Bizonyítsuk be, hogy G' $(k+1)$-szeresen élösszefüggő.

Azt kell bebizonyítani, hogy k él elhagyása utan a gráf összefüggő marad. 1 pont

Legyen G_1 G egyik példánya az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokon, G_2 a másik példány a $w_1, w_2, \ldots, w_n$ csúcsokon. Hagyjunk el k élet, és tegyük fel, hogy szétesett a gráf két komponensre. 1 pont

Ha G_1 is szétesett, vagyis $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nem mind ugyanabban a komponensben vannak, akkor, mivel G_1 k-összefüggő volt, mind a k élet G_1-ből hagytuk el. De akkor G_2 és a G_1 és G_2 közti élek mind megmaradtak, a gráf összefüggő maradt. 3 pont

Ha G_2 esett szét, akkor ugyanígy érvelhetünk. 1 pont

Ha viszont se G_1, se G_2 nem esett szét, akkor az egyik komponensben van $u_1, u_2, \ldots, u_n$, a másikban $w_1, w_2, \ldots, w_n$. De mivel $n > k$, ez lehetetlen, legalább egy él maradt G_1 és G_2 között. 4 pont

6. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{40}$. A v_i és v_j pontok össze van kötve éllel akkor és csak akkor ha $|i-j| = 3$ vagy $|i-j| = 5$. Határozzuk meg a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$, $\alpha(G)$ értékeket. ($\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma.)

A gráfban van teljes párosítás: v_1v_6, v_2v_7, v_3v_8, v_4v_9, v_5v_{10}, ez lefedi az első tíz csúcsot, és ezt eltoljuk 10-zel, 20-szal, és 30-cal. 3 pont

Tehát $\nu(G) \geq 20$. De mivel 20-nál több független él nem lehet, $\nu(G) = 20$. 1 pont

A Gallai tétel miatt $(\nu(G) + \rho(G) = 40)$ ekkor $\rho(G) = 20$. 1 pont

G páros gráf, mert minden él páros és páratlan indexű csúcsot köt össze. 3 pont

Ezért alkalmazhatjuk a Kőnig tételeket ($\nu(G) = \tau(G)$ és $\rho(G) = \alpha(G)$) és ennek alapján $\tau(G) = 20$ és $\alpha(G) = 20$. 2 pont