Kombinatorika és gráfelmélet I

Első PótZH, 2010. dec. 10. 12.15-13.45, H405/A

Javítókulcs

1. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{12}$. Hány feszítőfa van rajtuk a következő tulajdonsággal. A v_1v_2 él benne van, és ha elhagyjuk ezt az élet a feszítőfából, akkor egy 4 és egy 8 csúcsú fára esik szét.

Ha a v_1v_2 élet elhagyjuk, v_1 az egyik, v_2 a másik komponensben lesz. Tehát két eset van, v_1 lesz a 8 pontú komponensben, v_2 a 4 pontúban, vagy fordítva. Mindkét esetben ugyananúgy megy tovább a számolás, tegyük fel, hogy v_1 lesz a 8 pontú komponensben, v_2 a 4 pontúban. 3 pont

v_1-hez választanunk kell még 7 pontot, ez $\binom{10}{7}$ lehetőség, ezzel meghatároztuk, hogy melyik komponensben melyik pontok vannak. 3 pont

v_1 illetve v_2 komponensén kell vennünk egy-egy feszítőfát, ezt a Cayley tétel szerint 8^6 illetve 4^2 féleképpen tehetjük meg. 3 pont

Tehát összesen $2\binom{10}{7}8^6 4^2$ feltételeknek megfelelő feszítőfa van. 1 pont

2. Legyen G egy $3k$ csúcsú gráf, k darab diszjunkt háromszög uniója. Legkevesebb hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton kör?

Egy Hamilton kör mindegyik háromszögnek legfeljebb 2 élét használhatja. 3 pont

Ez $2k$ él, összesen pedig $3k$ éle van egy Hamilton körnek, tehát biztos szükség van még legalább k élre. 3 pont

k él elég is: legyenek a gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{3k}$ és legyenek a háromszögek $v_1v_2v_3, v_4v_5v_6, \dots, v_{3k-2}v_{3k-1}v_{3k}$. Vegyük be a $v_3v_4, v_6v_7, \dots, v_{3k-3}v_{3k-2}, v_{3k}v_1$ éleket, ez k él, és a kapott gráf tartalmazza a $v_1v_2\cdots v_{3k}$ Hamilton kört. 4 pont

3. A G 12 csúcsú teljes gráf csúcsai $u_1, u_2, u_3, u_4,\ v_1, v_2, \dots, v_8$. Az u_iu_j élek súlya 5 ($1 \le i, j \le 4$), a v_iv_j élek súlya 10 ($1 \le i, j \le 8$), az u_iv_j élek súlya x ($1 \le i \le 4,\ 1 \le j \le 8$). Határozzuk meg G minimális összsúlyú feszítőfájának a súlyát x függvényében.

Három esetet különböztetünk meg: 1. eset: $x \le 5$, 2. eset: $5 \le x \le 10$, 3. eset: $10 \le x$. 2 pont

Tudjuk, hogy a mohó algoritmus megtalálja a minimális összsúlyú feszítőfát, ezét mindhárom esetben ezt fogjuk gondolatban lefuttatni. 2 pont

1. Először x súlyú éleket választunk (melyek az u és v pontok között futnak). Ezekből 11-et választva úgy, hogy közben nem alkotunk kört, éppen egy $11x$ súlyú feszítőfát kapunk. Tehát itt a válasz $11x$. 2 pont

2. Először az 5 súlyú éleket választjuk, de ezekből csak 3-at tudunk választani, különben kört kapnánk. Utána befejezzük a fát 8 db x súlyú éllel, így a válasz $15 + 8x$. 2 pont

3. Itt először az 5 súlyú éleket választjuk, de ezekből csak 3-at tudunk választani, utána a 10 súlyú éleket választjuk, de ezekből csak 7-et tudunk választani, végül összekötjük a két fát egy x súlyú éllel. A válasz $15 + 70 + x$. 2 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy a 101 csúcsú teljes gráfnak, K_{101}-nek

a. legalább 99 különböző Euler köre van.

b. legalább 99! különböző Euler köre van.

A 101 csúcsú teljes gráf természetesen összefüggő, minden csúcs foka 100, tehat van Euler köre. 2 pont

a. Az Euler kör tartalmazza a v_1v_2 élet, és v_2-ből még a többi 99 csúcs bármelyikébe továbbmehetünk, majd tetszőlegesen befejezhetjük az Euler kört. Ez legalább 99 lehetőség. 4 pont

b. Az Euler kör tartalmazza a v_1v_2 élet, és v_2-ből még a többi 99 csúcs bármelyikébe továbbmehetünk. Ebből a csúcsból a maradék 98 csúcs bármelyikébe továbbmehetünk, és így tovább, amíg el nem fogynak a csúcsok. Az így kapott Hamilton utat tetszőlegesen folytathatjuk hogy egy Euler kört kapjunk. Ez 99! lehetőség. 4 pont

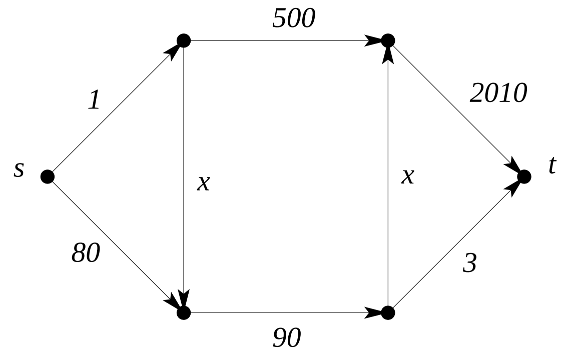
5. Határozzuk meg az összes olyan x számot, amelyre az alábbi hálózatban a maximális folyam értéke 81.

Mivel van egy $4 + x$ értékű vágás (lásd az ábrát) ezért ha $x < 77$, akkor nincs 81 értékű folyam. 3 pont

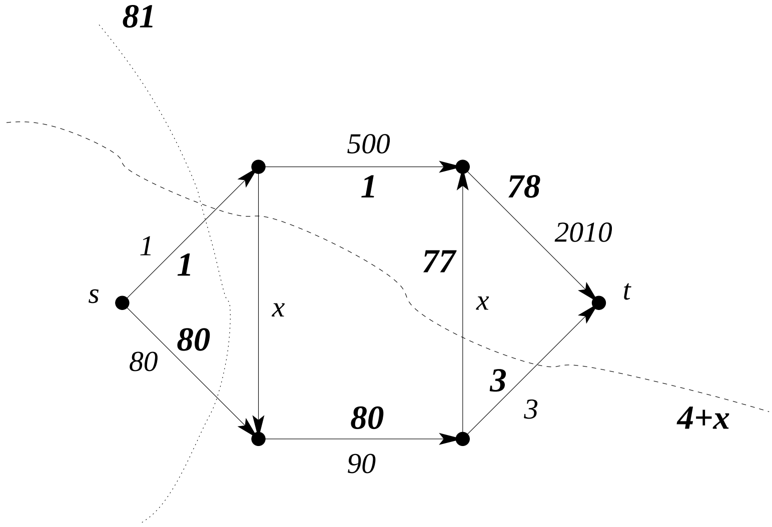
Ha $x \ge 77$, akkor van 81 értékű folyam (ábra). 3 pont

Több meg akkor sincs, mert van egy 81 értékű vágás is (lásd az ábrát). 3 pont

Tehát a válasz $x \ge 77$. 1 pont



1. ábra. A FELADAT



2. ábra. A MEGOLDÁS

6. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{40}$, v_i és v_j akkor és csak akkor van összekötve, ha ij osztható 4-gyel.

a. Vegyünk el **pontosan** 10 élet G-ből úgy, hogy a maradék gráfnak van Euler köre.

b. Vegyünk el **pontosan** 11 élet G-ből úgy, hogy a maradék gráfnak van Euler köre.

A gráf a következőképpen néz ki: a 20 db páros indexű csúcs teljes gráfot alkot, és ezek közül a 10 db 4-gyel osztható indexű a 20 db páratlan indexűvel is össze van kötve. Más él nincs. 2 pont

Tehát a gráf összefüggő, a 10 db 4-gyel osztható indexű csúcs fokszáma 39, a 10 db páros, de 4-gyel nem osztható indexű csúcs fokszáma 19, a 20 páratlan indexű csúcs fokszáma 10. 2 pont

El kell érnünk, hogy minden fokszám páros legyen, és a gráf összefüggő maradjon. 1 pont

Jelenleg a páros indexű csúcsokkal van baj, az ő fokszámuk páratlan. 1 pont

a. Vegyünk el egy teljes párosítást a páros indexű csúcsokon. Ezzel a gráf összefüggő maradt, és a páros indexű csúcsok fokszáma eggyel csökkent, így a kapott gráfnak van Euler köre. 2 pont

b. Az előzőt úgy módosítjuk, hogy a teljes párosítás egyik élét kicseréljük egy V betűre, vagyis 2 élre, amelyeknek a közös vége egy páratlan szám, a másik végük pedig az eredeti él két vége. (Pl a v_2v_4 él helyett vegyük a v_2v_1 és v_4v_1 éleket.) Ezzel összesen 11 élet hagytunk el, minden páros indexű csúcs fokszáma eggyel csökkent, egy páratlan indexű csúcs fokszáma kettővel csökkent, és a gráf összefüggő maradt, tehát a kapott gráfnak van Euler köre. 2 pont