# Kombinatorika és gráfelmélet I
## 1. ZH, 2010. okt. 18. 10.15-11.45, E1C
## **Javítókulcs**

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

### 1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_8$ csúcsokon, amelyben minden csúcs fokszáma vagy 1 vagy 3?

Elég a fa Prüfer kódját vizsgálni, mert ezek egyértelműen megfelelnek a fáknak. 1 pont
A Prüfer kódban minden csúcs sorszáma a fokszáma $-1$-szer szerepel, tehát itt minden szám 0-szor vagy 2-ször. 1 pont
A Prüfer kód 6 hosszú, vagyis pontosan 3 szám lesz benne, mindegyik 2-szer. 2 pont
Ezt a 3 számot $\binom{8}{3}$ féleképpen választhatjuk ki. 2 pont
Ha már megvan a 3 szám, akkor $\frac{6!}{2^3}$ féleképpen készíthetünk belőlük egy 6 hosszú sorozatot 3 pont
Tehát $\binom{8}{3}\frac{6!}{2^3}$ ilyen fa van. 1 pont

### 2. Legkevesebb hány élet kell hozzáadni egy $n$ csúcsú csillaghoz (egy csúcs összekötve a többi $n-1$ csúccsal) hogy a kapott gráfnak legyen Hamilton köre?

Legyen $v_1$ a csillag közepe, $v_2, v_3, \ldots, v_n$ a többi csúcs.
Ha betesszük a $v_2v_3\cdots v_n$ út éleit, akkor lesz Hamilton kör, $v_1v_2v_3\cdots v_n$. Itt $n-2$ élet adtunk hozzá a gráfhoz, tehát $n-2$ él elég. 4 pont
$n-2$ él szükséges is, mert egy $n$ csúcsú Hamilton körnek $n$ éle van, de a csillag élei közül csak kettőt használhat. 6 pont

### 3. A teljes gráf éleit úgy súlyoztuk meg, hogy minden Hamilton út egy minimális összsúlyú feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy az összes élnek ugyanaz a súlya.

Tegyük föl, hogy $e$ és $f$ a gráf két tetszőleges éle. Könnyen látható, hogy létezik rajtuk keresztül Hamilton kör. 3 pont
Ebből a körből akár $e$-t, akár $f$-et kihagyjuk, egy Hamilton utat kapunk. Ennek a két Hamilton útnak a feltétel szerint ugyanannyi a súlya, ezért $e$-nek és $f$-nek is ugyanannyi a súlya. 6 pont
Mivel $e$ és $f$ tetszőleges élek voltak, ezért bármely két élnek egyforma a súlya. 1 pont

### 4. Hány Euler köre van a $K_{2,100}$ gráfnak? (A $K_{2,100}$ gráfnak 102 csúcsa van, ezek közül kettő össze van kötve a többi száz mindegyikével.)

Legyen $v_1$ és $v_2$ az egyik osztályban levő két pont, és $u_1, u_2, \ldots, u_{100}$ a másik osztályban levő száz pont.
Ekkor az Euler kör a következőképpen néz ki: $v_1u_{i_1}v_2u_{i_2}v_1u_{i_3}v_2u_{i_4}\cdots u_{i_{100}}v_1$ ahol $i_1, i_2, \ldots, i_{100}$ az $1, 2, \ldots, 100$ számok egy tetszőleges permutációja. 5 pont
Ezzel a módszerrel 100! Euler kört találhatunk. De így minden Euler kört 100-szor számoltunk, mert $v_1$ 50-szer szerepel egy Euler körben, és mind az 50 előfordulása lehetett a felírásban a kezdőpont, ráadásul még ekkor is kétféle irányban járhatjuk be ugyanazt az Euler kört. 4 pont
Tehát $100!/100 = 99!$ Euler köre van. 1 pont

Másik megoldás:

A $v_1u_1$ él biztos benne van az Euler körben, tehát az Euler kör a következőképpen néz ki: $v_1u_1v_2u_{i_2}v_1u_{i_3}v_2u_{i_4}\cdots u_{i_{100}}v_1$, ahol $i_2, i_3, \ldots, i_{100}$ a $2, 3, \ldots, 100$ számok egy tetszőleges permutációja. 7 pont

Ezzel a módszerrel 99! Euler kört találtunk, és mindegyiket pontosan egyszer számoltuk. 3 pont

5. Egy 51 csúcsú összefüggő egyszerű gráfban egy csúcs foka 30, a többié 19.

a. Bizonyítsuk be, hogy a gráf komplementerében van Hamilton kör.

b. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti gráfhoz hozzá lehet venni 25 élet úgy, hogy a kapott gráf is egyszerű legyen, és legyen Euler köre.

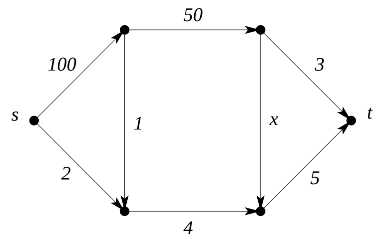
a. A gráf komplementerének 51 csúcsa van, egy csúcs foka 20, a többi 31, ezért az Ore tételből következik hogy van benne Hamilton kör. 3 pont

b. Hagyjuk ki ebből a Hamilton körből a 20 fokú csúcsot, így kapunk egy 50 csúcsú, 49 élű utat, a többi csúcson. Vegyük ennek az ennek az első, harmadik, ... minden páratlanodik élét, ez éppen 25 él, ezeket vegyük hozzá az eredeti gráfhoz. 5 pont

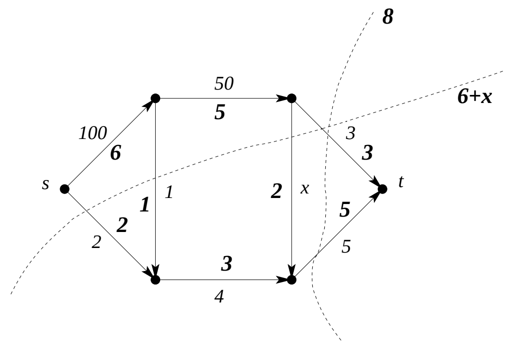
Mivel ezek az élek eddig nem voltak a gráfban, a kapott gráf egyszerű lesz. 1 pont

Egy csúcs foka 30, a többié 20, a feltétel szerint összefüggő, tehát van Euler köre. 1 pont

6. Határozzuk meg az összes olyan $x$ számot, amelyre az alábbi hálózatban a maximális folyam értéke 8.




1. ábra. A FELADAT




2. ábra. A MEGOLDÁS

Mivel van egy $6 + x$ értékű vágás (lásd az ábrát) ezért ha $x < 2$, akkor a nincs 8 értékű folyam. 3 pont

Ha $x \geq 2$, akkor van 8 értékű folyam. (lásd az ábrát) 3 pont

Több meg nincs akkor sem, mert van egy 8 értékű vágás is. 3 pont

Tehát a válasz $x \geq 2$. 1 pont